



TRAITÉ

DES

PROJECTIONS

DES

CARTES GÉOGRAPHIQUES

REPRÉSENTATION PLANE DE LA SPHÈRE ET DU SPHÉROÏDE

PAR

A. GERMAIN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE.

PREMIÈRE PARTIE. — THÉORIE DES PROJECTIONS.

DEUXIÈME PARTIE. — CONSTRUCTION ET USAGE DES PRINCIPALES PROJECTIONS.

Accompagnées de 14 planches gravées.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR S. EXC. M. LE MINISTRE DE LA MARINE ET DES COLONIES.

PARIS

ARTHUS BERTRAND, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE

21, rue Hautefeuille.

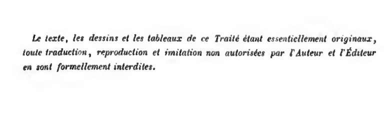
TRAITÉ

DES

PROJECTIONS

DES

CARTES GÉOGRAPHIQUES.



Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cie, 26, rue Racine.

TRAITÉ

DES

PROJECTIONS

DES

CARTES GÉOGRAPHIQUES

REPRÉSENTATION PLANE DE LA SPHÈRE ET DU SPHÉROÏDE

PAR

A. GERMAIN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR HYDROGRAPHE
DE LA MARINE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE.

PREMIÈRE PARTIE. — THÉORIE DES PROJECTIONS.

DEUXIÈME PARTIE. — CONSTRUCTION ET USAGE DES PRINCIPALES PROJECTIONS.

Accompagnées de 14 planches gravées.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR S. EXC. M. LE MINISTRE DE LA MARINE
ET DES COLONIES.

PARIS

ARTHUS BERTRAND, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE

21, rue Hautefeuille.

PRÉFACE.

Lorsqu'un géographe instruit se propose de dresser une carte nouvelle il doit se demander tout d'abord quel but elle doit atteindre, quel rôle elle est appelée à remplir dans l'étude de la science, et choisir le mode de représentation, la *projection* qui convient le mieux à cet objet ; de cette projection dépend en effet la mesure des erreurs dont l'ensemble est inévitable dans la représentation de la sphère ou du sphéroïde sur un plan, mais dont chacune séparément peut être diminuée ou même entièrement annulée à la condition d'augmenter les autres. C'est ainsi que les cartes marines, qui doivent figurer la route du navire par la ligne la plus facile à construire et à mesurer en grandeur et en direction, sacrifient dans ce but l'étendue relative des contrées dont la connaissance importe peu pour les besoins de la navigation. Une carte céleste doit de même conserver les formes des constellations et les alignements qui permettent de les reconnaître ; mais une carte physique destinée à l'étude et à la mesure des terrains de diverses natures, par exemple, ne pourra être dressée d'après les mêmes lois et devra, au contraire, conserver intégralement l'étendue relative des pays qu'elle embrasse, de même qu'une carte politique destinée à donner une idée exacte de l'importance de chaque nation ou de chaque province.

Mais ce n'est pas tout ; telle projection qui serait excellente pour représenter un pays très-étendu en latitude ne conviendra nullement pour un autre dont la plus grande dimension sera au contraire dans le sens des longitudes, ou qui ne sera pas placé de la même manière par rapport à l'équateur, ou dont encore l'étendue et la forme générale seront très-différentes.

Il est impossible de donner des règles fixes pour le choix du

système qui convient le mieux à la représentation de chaque pays et à l'objet que doit remplir la carte; car, lors même que l'on évaluerait en chaque point les erreurs inhérentes à chaque tracé, il serait impossible de comparer entre eux d'une manière absolue des systèmes tout différents, qui, ne remplissant pas le même but, ne peuvent répondre aux mêmes besoins. Mais il est possible du moins de guider le géographe dans le choix qu'il doit faire en lui montrant les avantages et les inconvénients de chaque mode de projection et lui rendant facile l'appréciation des diverses sortes d'erreurs dans les limites où chacun de ces tracés peut être utilement adopté.

C'est dans ce but que nous avons entrepris cet ouvrage.

Beaucoup d'auteurs ont traité ce sujet depuis Ptolémée jusqu'à nos jours; la plupart n'ayant en vue qu'un système unique l'ont préconisé outre mesure au détriment des autres déjà connus; d'autres, tels que Lambert, de Lagrange, Euler, Gauss, Littrow... ont traité la question à un point de vue théorique plus général, mais toujours très-incomplétement. Quelques traités des projections, tels que ceux de Jean-Tobie Mayer, de Steinhauser, de W. Hughes.., ont donné, sous forme élémentaire, les procédés graphiques de construction, sans éclairer le géographe d'une manière suffisante ni lui permettre d'évaluer les erreurs de chaque tracé. Dans aucun de ces ouvrages on ne trouve l'exposé de toutes les projections employées aujourd'hui, et encore moins de celles qui, proposées seulement, ont une utilité pratique qui peut, dans certains cas, les rendre préférables à d'autres. Il faut bien l'avouer, cette lacune est encore plus grande en France que partout ailleurs; les grands noms que nous avons cités appartiennent presque tous à l'Allemagne; Lambert est celui qui revient le plus souvent dans l'histoire de cette branche de la géographie, et l'on peut dire que l'illustre professeur de Berlin a doté l'art des projections de plus de méthodes ingénieuses et utiles que tous ceux qui se sont occupés du même sujet avant ou après lui. Il ne faut point cependant passer sous silence les noms de ceux qui, en France, ont fait faire un pas de plus à la science : la Hire,

Parent, de l'Isle, Sanson, Guillaume Petit, Bonne, figurent dignement à côté des Mercator, des Mollweide, etc., et de nos jours MM. Bonnet, Tissot, C. Foucaut, Collignon, appliquent les sciences mathématiques à la recherche de projections nouvelles et plus exactes, tandis qu'en Angleterre les Airy, les Herschel, les James, les Clarke, se livrent de leur côté à de nouvelles études sur ce sujet.

Nous n'avons rien négligé de ce qui peut importer à l'étude de la géographie et nous avons consulté, traduit nous-même ou fait traduire sous nos yeux tous les auteurs qui, en s'occupant de ce sujet, ont fait progresser la science; leur nombre était grand : il nous a fallu choisir entre leurs différentes méthodes, les élucider souvent et les compléter presque toujours. Nous avons pensé que si l'examen et l'exposé de chaque projection en particulier ne suffisait pas pour rendre intelligible et raisonnée l'étude du grand nombre de systèmes dont plusieurs remplissent le même but, la théorie générale seule ne pourrait servir de guide suffisant au géographe qui n'a pas toujours le temps d'étudier les formules et d'en déduire toutes les conséquences pratiques : nous avons donc partagé notre ouvrage en deux grandes parties; l'une exclusivement théorique dans laquelle les projections les plus importantes ne figurent que par leur loi de formation et leurs propriétés générales, tandis que d'autres d'un usage moins général y sont traitées avec des détails suffisants pour en permettre l'emploi à un géographe instruit; l'autre partie, purement pratique, qui étudie en détail les principaux systèmes et en expose les modes de construction les plus exacts et les plus rapides.

Dans la première partie nous avons d'abord exposé les connaissances et les formules indispensables à l'intelligence des chapitres suivants, donné les moyens généraux de construire les détails sur les canevas préalablement tracés, de mesurer les distances des points, de tenir compte de la forme sphéroïdale de la terre; puis nous avons partagé l'ensemble des systèmes de représentation en deux grandes classes :

1° les projections *orthomorphes* qui jouissent de la propriété

de ne pas altérer les angles, d'où il résulte que chaque contrée de peu d'étendue présente la forme qu'elle a réellement sur le globe;

2° les projections *équivalentes* qui conservent l'étendue relative des surfaces.

Après avoir étudié ces deux groupes au point de vue général et avoir dit quelques mots de chacun des systèmes qui les composent, nous avons considéré dans leur ensemble :

1° les projections *zénithales*, c'est-à-dire qui peuvent être regardées comme des représentations géométriques de la sphère sur le plan de l'horizon d'un lieu quelconque; dans cette classe sont comprises les projections perspectives dont nous avons fait un chapitre spécial à cause de leur importance;

2° les projections par développement cylindrique ou conique, c'est-à-dire celles qui peuvent être considérées comme des développements de surfaces destinées à remplacer, dans l'étendue du pays à représenter, la surface de la sphère qui n'est pas développable.

Enfin, nous avons terminé cette partie théorique en donnant les moyens d'évaluer les erreurs de chaque projection en tout point défini par sa latitude et sa longitude, et de comparer par conséquent les divers systèmes qui sembleraient à première vue convenir également au tracé d'une même contrée. Nous avons ensuite examiné rapidement la question de la représentation de la surface du globe en une ou deux cartes seulement, et donné pour la construction des cartes générales ou particulières quelques conseils qui n'ont pas d'autre prétention que d'appeler l'attention du géographe sur l'importance d'une projection convenable et sur la nécessité de connaître parfaitement les avantages et les inconvénients de chaque système pour choisir celui qui convient le mieux à la carte qu'il se propose de construire et à l'objet qu'elle doit remplir. Il est presque inutile d'ajouter que les difficultés du tracé ne devront jamais arrêter le géographe lorsqu'il en résultera des avantages dans l'usage journalier des cartes, car, ainsi que le dit Lacroix dans son *Introduction à la Géographie mathématique*, le dessin de la projection

est toujours, pour un géographe instruit, la moindre des difficultés que présente l'exécution d'une carte.

Dans la seconde partie nous avons exposé en détail les procédés graphiques de construction d'un certain nombre des projections les plus importantes que nous n'avions étudiées qu'au point de vue théorique dans les chapitres précédents. Nous avons aussi donné les moyens d'évaluer les erreurs d'angles, de distances et de surfaces, de construire les angles en véritable grandeur, de mesurer les distances des divers points, etc., lorsque les constructions ou les calculs que nécessitent ces opérations peuvent s'effectuer simplement et conduisent à des résultats importants. Des tables calculées par nous ou reproduites après vérification, rendront plus facile et surtout plus rapide le tracé de chaque canevas. Nous avons tenu compte de l'aplatissement de la terre toutes les fois qu'il pouvait être utile de le faire. Disons enfin que certains détails que nous avons donnés et qui, pour quelques systèmes, pourraient sembler étrangers à la question de la construction des cartes, seront d'une grande utilité pour passer d'un système à un autre, soit dans la reproduction de cartes étrangères, soit dans la construction des cartes d'ensemble dont les différentes parties n'auront pas été dressées d'après la même projection.

En parlant de chaque système nous avons donné, le plus souvent sous forme de notes, l'histoire de son invention et ses applications les plus connues ; c'est dans le travail si remarquable à tous égards de M. d'Avezac (1) que nous avons puisé la plupart de ces renseignements historiques et trouvé la liste presque complète des ouvrages à consulter. Nous sommes heureux de l'occasion qui se présente ici de remercier sincèrement le savant auteur de cette notice du concours qu'il a bien voulu nous prêter en mettant à notre disposition son inépuisable complaisance et son immense érudition, pour nous permettre de re-

---

(1) *Coup d'œil historique sur la projection des cartes géographiques*, par M. d'Avezac, président de la commission centrale de la Société de géographie de Paris; notice lue à la Société le 19 décembre 1862. — Paris, 1863.

cueillir le grand nombre de matériaux dont nous nous sommes entouré et nous communiquer ceux qu'il avait pu se procurer lui-même.

Dans les planches qui accompagnent cet ouvrage, nous avons tracé les différents canevas que peuvent former les méridiens et les parallèles de dix en dix degrés; nous avons pensé qu'en appliquant les différents systèmes de projection à la représentation du globe entier, ou au moins d'un hémisphère, on apprécierait plus facilement les avantages et les défauts de chacun d'eux et les limites dans lesquelles on peut utilement les employer. Pour rendre la comparaison plus aisée, nous avons adopté une sorte d'échelle commune, c'est la longueur qui représente le degré au centre de chaque canevas; cette longueur est ici d'un demi-millimètre (1), ce qui revient à supposer que chaque projection est faite sur un plan tangent à une sphère d'un rayon égal à $0^m,028648$ environ. Le centre du canevas a toujours été pris sur le méridien de Paris, dont la latitude est 48°50′14″, et sa latitude a été indiquée sur chaque canevas.

(1) Nous n'avons pu tenir compte du retrait du papier qui, dans les planches de cet ouvrage, diminue l'échelle de 1/100 environ.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

	Pages.
1. Considérations générales sur les projections	3
2. Influence de la forme sphéroïdale de la terre dans la construction des cartes géographiques	5
3. Éléments du sphéroïde	6
4. Méthode de Prony pour tenir compte de l'aplatissement	11
5. Détermination des points sur les canevas	16
6. Évaluation des distances	19
7. Tracé des cartes célestes à l'aide des coordonnées astronomiques	21
8. Tracé de l'orbite d'un astre sur une projection	23
9. Théorie générale des projections	24

CHAPITRE II.

PROJECTION SANS DÉFORMATION OU ORTHOMORPHES.

1. Équations générales	31
2. Rapports d'agrandissement des longueurs et des surfaces élémentaires	36
3. Détermination des fonctions arbitraires par la forme et la loi de graduation du premier méridien. Projection des cartes marines de Mercator	37
4. Détermination des fonctions arbitraires par la condition qu'elles soient des exponentielles réelles. Projections stéréographiques polaires, des cartes marines, conique orthomorphe de Lambert (dite de Gauss)	38
5. Détermination des fonctions arbitraires par d'autres conditions	41
6. Détermination des fonctions arbitraires par la condition que les méridiens et les parallèles de la projection soient des circonférences. Projection de Lagrange	42
7. Modifications apportées par Lagrange à sa projection pour le cas des cartes particulières	51
8. Étude directe des projections orthomorphes à parallèles concentriques et méridiens rectilignes; méthode de Lambert; formule générale de la projection conique orthomorphe	55
9. Détermination de la constante arbitraire de telle sorte que les degrés de deux parallèles donnés aient entre eux leur rapport véritable	58
10. Détermination de la constante arbitraire par la connaissance de la latitude sous laquelle le rapport d'agrandissement doit être minimum	59
11. Application de cette projection aux cartes célestes et aux *coniglobes*	60
12. Étude directe des projections orthomorphes à méridiens et parallèles circulaires; méthode de Lambert	62
13. Méthode des coefficients indéterminés	65
14. Projection cylindrique orthomorphe de Lambert	68
15. Détermination de l'une des deux équations de la projection quand on connaît l'autre	73
16. Projection de Littrow à méridiens elliptiques et parallèles hyperboliques	74
17. Note sur la construction des cartes géographiques par M. Tchebychev	75

CHAPITRE III.

PROJECTIONS SANS ALTÉRATION DES SURFACES OU ÉQUIVALENTES.

1. Équations générales	81

Pages.
2. Projection isocylindrique normale de Lambert. 84
3. Projection isocylindrique transverse de Lambert. 85
4. Détermination des fractions arbitraires par la condition que les méridiens et les parallèles se coupent à angles droits. 87
5. Détermination des fonctions arbitraires par la condition que les parallèles soient représentés par des droites parallèles. Méthode de M. Prépetit-Foucaut. 88
6. Projection sinusoïdale de Sanson. 90
7. Projection dite stéréographique équivalente de M. Foucaut. 91
8. Projection à méridiens et parallèles rectilignes de M. Collignon. 92
9. Projection à parallèles circulaires et concentriques; formules générales. 95
10. Application aux projections à parallèles respectivement égaux à ceux de la sphère. 95
11. Projection équivalente de Werner. 97
12. Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la guerre. 98
13. Projection isosphérique sténotère de Lambert. 99
14. Projection isosphérique isomère ou zénithale de Lambert dite de Lorgna. . . . 101
15. Mappemondes mixtes en trois parties de M. Collignon. 103
16. Projections équivalentes coniques. Projection d'Albers. 103
17. Projections équivalentes cylindriques. 107
18. Projections équivalentes de Mollweide dite homalographique de M. Babinet. . . 107

CHAPITRE IV.

PROJECTIONS PERSPECTIVES.

1. Considérations générales. 111
2. Formules générales. 112
3. Construction des parallèles et des méridiens par points. 114
4. Projections perspectives équatoriales ou polaires. 117
5. Projections perspectives méridiennes. 118
6. Détermination directe et graphique d'un point donné par sa latitude et sa longitude. 120
7. Détermination de la distance de deux points donnés en projection. 121
8. Projection gnomonique ou centrale. 122
9. Projection stéréographique. 123
10. Projection orthographique. 124
11. Recherche de la position du point de vue qui altère le moins possible les distances. 124
12. Projection de la Hire. 125
13. Première projection de Parent. 127
14. Deuxième projection de Parent. 130
15. Projection de Lowry. 131
16. Emploi des projections perspectives pour représenter une portion du globe plus grande qu'un hémisphère. Mappemonde en quatre parties de M. Woolgar. . . 132
17. Recherche de la position du point de vue qui altère le moins les surfaces. Troisième projection de Parent. 133
18. Projection du colonel James. 135
19. Emploi des projections perspectives pour les cartes particulières. 136
20. Transformation d'un système perspectif en un autre. 136

CHAPITRE V.

PROJECTIONS ZÉNITHALES.

1. Considérations générales. 139
2. Formules de transformation des coordonnées. 140
3. Transformation graphique d'un système en un autre. 142
4. Projections perspectives. 144
5. Projection zénithale équidistante de Lambert dite de Cagnoli. 144
6. Projections intermédiaires. 146
7. Projection équivalente ou isosphérique *isomère* de Lambert. 147

Pages.
8. Projection *by Balance of Errors* de M. Airy. 147
9. Projection perspective du colonel James 153
10. Modification par le capitaine Clarke. 154
11. Étude de l'altération des angles 156
12. Directions conjuguées. 159
13. Altération des angles dans chacune des projections indiquées précédemment. . 161
14. Étude de l'altération des longueurs et des surfaces. 163
15. Application à chacune des projections indiquées précédemment. 166
16. Comparaison des projections zénithales entre elles. 170

CHAPITRE VI.

PROJECTION PAR DÉVELOPPEMENT ET LEURS MODIFICATIONS.

1. Considérations générales. 173
2. *Projections coniques.* Développement du cône tangent. 173
3. Projection conique de Ptolémée 177
4. Développement du cône sécant. 178
5. Projection de la carte de Russie de de l'Isle. Étude et modification de ce système par Euler. 179
6. Première projection de Murdoch. 184
7. Deuxième projection de Murdoch. 186
8. Troisième projection de Murdoch. 188
9. Projection conique orthomorphe de Lambert dite de Gauss. 189
10. Projection conique équivalente d'Albers. 190
11. Projection conique équivalente ou isosphérique sténotère de Lambert. 191
12. Projections coniques modifiées 192
13. Projection homéotère de Ptolémée. 192
14. Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la guerre. 194
15. Projection sinusoïdale de Sanson. 196
16. Projection de J. Werner. 198
17. Projection polyconique rectangulaire. 199
18. Projection polyconique ordinaire des Américains. 201
19. Projection polyconique équidistante des Américains. 202
20. *Projections cylindriques.* 203
21. Projection plate parallélogrammatique. 203
22. Projection plate carrée. 204
23. Projection des cartes réduites ou de Mercator. 205
24. Projection de Cassini. 206
25. Projection isocylindrique normale de Lambert. 208
26. Projection cylindrique traverse. 209
27. Projection cylindrique orthomorphe de Lambert. 210
28. Projection cylindrique d'une zone non équatoriale. 211
29. Projection cylindrique d'une zone étroite et oblique par rapport à l'équateur. Méthode de Textor. 212
30. Projection centrale sur un cylindre tangent le long d'un méridien. 213
31. Modification de la projection cylindrique; projection trapéziforme. 214

CHAPITRE VII.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ALTÉRATIONS DANS UNE PROJECTION QUELCONQUE.

1. Considérations générales. 217
2. Toute représentation du sphéroïde sur un plan peut être remplacée en chaque point par une projection orthogonale faite à une échelle convenable. 220
3. Formules qui en résultent. Tangentes principales. 220
4. Application à quelques projections équivalentes. 223
5. Choix de la projection. 224
6. Trouver le meilleur mode de projection pour représenter la surface entière du globe au moyen d'une ou de deux cartes. 225
7. Considérations sur les systèmes qui conviennent le mieux aux cartes générales et aux cartes particulières. 228

Pages.
8. Note sur les cartes géographiques par M. Tissot. Trouver le meilleur mode de projection pour chaque contrée particulière. Projections de M. Tissot. . . . 230

DEUXIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION ET USAGE DES PRINCIPALES PROJECTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

1. Considérations générales. Influence de l'aplatissement. 237
2. Démonstration géométrique de la propriété de ce système. 237
3. Rapport d'agrandissement. 238
4. Formules générales 240
5. Projection polaire ou équatoriale. 240
6. Projection méridienne. Tracé des méridiens. 242
7. Tracé des parallèles. 244
8. Projection horizontale. Tracé des parallèles. 246
9. Tracé des méridiens. 248
10. Solution de quelques problèmes de la sphère. 250

CHAPITRE II.

PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE.

1. Considérations générales. 253
2. Altérations d'angles, de longueurs et de surfaces. 253
3. Formules générales 255
4. Projection équatoriale ou polaire 255
5. Projection méridienne. 256
6. Projection horizontale. Équations des méridiens et des parallèles. 257
7. Construction graphique des méridiens. 258
8. Construction graphique des parallèles. 259
9. Solution de quelques problèmes de la sphère. 260

CHAPITRE III.

PROJECTION GNOMONIQUE OU CENTRALE.

1. Considérations générales 262
2. Altérations d'angles, de longueurs et de surfaces. 263
3. Formules générales 264
4. Projection polaire ou équatoriale. 265
5. Projection méridienne. 265
6. Projection horizontale. 266
7. Construction graphique. 268
8. Emploi de la projection centrale pour les cartes célestes. 270
9. Trouver la distance de deux points donnés sur la carte. 271

CHAPITRE IV.

PROJECTION DE LA GRANGE.

1. Tracé des méridiens. 273
2. Tracé des parallèles. 274
3. Rapport d'agrandissement. Modification relative aux cartes particulières. . . . 276
4. Application à une carte ayant Paris pour centre. 278
5. Représentation du globe entier dans une circonférence. 279
Tables. 280

Pages.

CHAPITRE V.

CARTES MARINES DITES CARTES RÉDUITES OU DE MERCATOR. — CARTES PLATES.

1. Formule générale. Latitudes croissantes. 281
2. Tracé des cartes particulières. 284
3. Évaluation des distances. 285
4. Tracé de l'arc de grand cercle. 287
Table des latitudes croissantes. 290
5. *Projection des plans provisoires de construction.* Coordonnées relatives à la méridienne et à la perpendiculaire. Tracé d'une carte plate. 292
6. Réunion des plans provisoires pour le tracé d'une carte reduite. 295

CHAPITRE VI.

PROJECTION DE CASSINI.

1. Considérations générales. Formules et tracé. 299
2. Détermination de l'angle formé par deux courbes de projection. 301
3. Rectification des arcs de plus courte distance. 302

CHAPITRE VII.

1° PROJECTION DITE DE BONNE OU DU DÉPÔT DE LA GUERRE.

1. Formules et tracé des méridiens et des parallèles. 305
2. Tracé des courbes par points à l'aide de leurs coordonnées. 306
3. Determiner la latitude et la longitude d'un point dont on connait les coordonnées. 308
4. Étude de l'altération des angles. 309
5. Altération des longueurs. 312

2° PROJECTION SINUSOÏDALE DE SANSON DITE IMPROPREMENT DE FLAMSTEED.

6. Formules et construction. 313

3° PROJECTION ÉQUIVALENTE DE WERNER.

7. Formule et table. 314
8. Note sur le développement du Dépôt de la guerre par M. Tissot. 315

CHAPITRE VIII.

PROJECTION ÉQUIVALENTE DE MOLLWEIDE DITE HOMALOGRAPHIQUE DE M. BABINET.

1. Formule générale. Tracé des méridiens et des parallèles. 319
2. Avantages et défauts de ce système. 320
Table de construction. 321

CHAPITRE IX.

PROJECTION ZÉNITHALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT.

1. Formule. Projection équatoriale ou polaire générale. 323
2. Projection méridienne dite de Lorgna 323
3. Projection horizontale. Emploi d'une projection auxiliaire 325
4. Altération des angles 328
5. Altération des longueurs 330

CHAPITRE X.

PROJECTIONS CYLINDRIQUES ÉQUIVALENTES DE LAMBERT.

1. Projection droite ou normale. Tracé du canevas. 335
2. Altérations d'angles et de longueurs. 335
3. Projection transverse. Construction graphique. 337
Tables de construction. 339

CHAPITRE XI.

PROJECTION CONIQUE ORTHOMORPHE DE LAMBERT DITE DE GAUSS.

1. Construction graphique. 341

Pages.
2. Diverses manières de déterminer la constante arbitraire 342
3. Avantages et inconvénients de ce tracé. 344
Tables de construction. 345

CHAPITRE XII.

PROJECTION CYLINDRIQUE ORTHOMORPHE DE LAMBERT.

1. Formules et construction graphique. 347
2. Rapport d'agrandissement des distances élémentaires. Avantages et inconvénients de ce système 349
Tables de construction. 350

CHAPITRE XIII.

PROJECTIONS POLYCONIQUES.

1. Projection *rectangulaire* adoptée au *War Office* pour les cartes embrassant une grande portion de la surface de la Terre. Formule et construction des méridiens 351
2. Déformation des longueurs et des surfaces 353
3. Projection *ordinaire* du *Coast Survey Office* des États-Unis. Construction graphique et formules des coordonnées. 356
Tables de construction. 358
4. Construction empirique d'un hémisphère. 359
5. Projection polyconique équidistante. 359

CHAPITRE XIV.

1° PROJECTION ZÉNITHALE ÉQUIDISTANTE.

1. Projection polaire 361
2. Projection méridienne. 361
3. Projection horizontale. 362
4. Altérations d'angles et de longueurs 362

2° PROJECTION GLOBULAIRE DITE IMPROPREMENT PROJECTION ANGLAISE OU D'ARROWSMITH.

5. Construction graphique 364
6. Différence entre cette projection et la précédente 365

CHAPITRE XV.

SYSTÈMES CONVENTIONNELS PEU EMPLOYÉS.

1. Projection d'Apianus 367
2 » d'Henri Loritz 368
3. Deux systèmes proposés par le P. Fournier. 368
4. Projection de Schmidt. 368
5. » de l'astronomie populaire d'Arago. 368
6. » de MM. Donny. 369
7. » du Dr Jager. 369
8. Modification proposée par M. Petermann. 370

TABLE I. Éléments du sphéroïde terrestre. 373
» II. Valeurs des degrés de longitude et des côtés des cônes tangents. . . 376
» III. Distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement. 377
» IV. Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées zénithales. 378

Table des planches. 381

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PROJECTIONS.

1. Les difficultés que présentent la construction et l'emploi des globes terrestres ou célestes de grandes dimensions ont fait renoncer à leur usage et mis dans la nécessité de chercher à représenter sur des surfaces planes la situation des divers lieux de la surface sphérique que l'on considère. Les opérations graphiques que l'on effectue dans ce but constituent ce que l'on appelle en géographie la *méthode des projections.*

Ces représentations embrassent, ou la surface totale du globe, ou une de ses parties principales, ou une seule contrée; dans le premier cas on les appelle *mappemondes*, et *planisphères* lorsqu'elles ont la forme circulaire; dans le second cas on les nomme *cartes générales;* dans le troisième, *cartes spéciales.*

Les cartes géographiques spéciales se distinguent en *chorographiques*, qui représentent une province avec ses cours d'eau, ses montagnes, ses points principaux: en *topographiques*, qui comprennent, pour une moindre étendue de pays, les détails de la nature du terrain, les grandes constructions et jusqu'aux habitations isolées et aux divisions des champs; et enfin en *plans géométriques*, qui représentent une localité assez petite pour que la surface à représenter puisse être considérée comme plane.

Les cartes peuvent encore prendre d'autres dénominations suivant l'usage auquel elles sont appropriées; telles sont les cartes *hydrographiques* destinées à la navigation, les cartes *géologiques* et autres destinées à l'étude de la physique du globe.

Les surfaces de la sphère et des sphéroïdes n'étant pas développables, c'est-à-dire ne pouvant être étendues sur un plan sans déchirure ni duplicature comme les surfaces coniques ou cylindriques, il est impossible d'en donner une représentation plane dans laquelle les configurations, les distances des lieux et l'étendue relative des

régions soient conservées dans leurs rapports mutuels. Les géographes sont donc obligés d'altérer sur une carte certains rapports de grandeurs plutôt que d'autres, suivant le besoin, ou bien de représenter tous ces rapports par approximation; il en résulte divers systèmes de projections qui varient suivant le but qu'on se propose d'atteindre.

Comme la situation des différents lieux d'une sphère se détermine généralement par les cercles de latitude et de longitude, c'est-à-dire les parallèles et les méridiens qui passent par ces lieux, toute la difficulté consiste dans la projection de ces cercles. Dans les premières cartes qu'on a construites, cette représentation a presque toujours été soumise aux règles de la perspective; l'idée de placer les lieux de la terre comme les verrait un observateur situé à une distance plus ou moins grande du centre du globe, est très-simple et très-naturelle, puisque la voûte céleste se présente à nous sous un aspect analogue, et qu'il en est de même des astres que nous pouvons apercevoir, tels que la lune; mais rien n'oblige à suivre cette méthode sans exception. On peut en effet, ainsi que le fait remarquer *Lagrange* (1), regarder les cartes géographiques sous un point de vue plus général et comme des représentations quelconques de la surface du globe; alors il n'y a qu'à tracer les méridiens et les parallèles suivant une loi quelconque donnée, et à placer les différents lieux par rapport à ces lignes comme ils le sont sur la sphère par rapport aux cercles de longitude et de latitude.

De cette manière, la construction d'une carte géographique devient un problème tout à fait indéterminé, mais on peut le déterminer en l'assujettissant à certaines conditions données suivant la destination de la carte; on peut demander, par exemple, que l'étendue des pays soit conservée, c'est-à-dire que des portions égales de la terre soient représentées par des portions égales de la carte; dans les cartes marines on demande que les différents rumbs de vent y soient représentés par des droites faisant entre elles les mêmes angles que ces rumbs font dans la rose du compas. On peut aussi s'imposer la condition de représenter les méridiens et les parallèles par des courbes d'une nature donnée, tout en satisfaisant à une autre condition, telle, par exemple, que la conservation des angles. On voit que les conditions du problème peuvent varier à l'infini.

(1) *Sur la construction des cartes géographiques*, dans les *Nouveaux mémoires de l'Academie de Berlin*, annee MDCCLXXIX, pages 161 à 210.

Mais, quelle que soit la condition que l'on impose, quel que soit le canevas que l'on adopte, la carte que l'on tracera sera entachée par rapport à la portion de la surface sphérique qu'elle représente, de l'une au moins des deux erreurs : *exagération* des surfaces, ou *déformation*, c'est-à-dire altération des angles ; nous donnerons le nom d'*altération* à l'erreur totale que comporte une carte, soit qu'elle provienne de l'une seulement de ces deux erreurs partielles, soit qu'elle résulte de leur existence simultanée, ce qui a lieu dans beaucoup de cas, soit que l'on cherche à réduire les trop grands écarts résultant de l'une des deux erreurs par l'introduction de l'autre, soit qu'on n'ait d'autre but que de représenter les méridiens et les parallèles par un système de lignes faciles à construire.

INFLUENCE DE LA FORME SPHÉROÏDALE DE LA TERRE DANS LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES. — ÉLÉMENTS DU SPHÉROÏDE.

2. La terre n'étant pas une sphère, mais un corps que l'on peut regarder comme un ellipsoïde de révolution, il est naturel de tenir compte de la forme réelle dans la construction des cartes géographiques d'une grande précision.

Si l'on compare la longueur 110563^m,7 d'un degré du méridien, à l'équateur, avec la longueur du degré au pôle 111680 mètres, on trouve une différence de 1116^m,2 qui n'est que $\frac{1}{99}$ environ de la première longueur, et si l'on compare le degré à l'équateur avec le degré à la latitude de 45°, 111119^m,4, on trouve que la différence 555^m,7 n'est que le $\frac{1}{119}$ du premier. Ainsi les degrés du méridien, quoique inégaux, diffèrent très-peu, et dans les projections qui n'exigent pas une extrême précision, on peut supposer la terre sphérique.

Il en est naturellement ainsi dans les planisphères et les mappemondes, et dans les cartes générales qui embrassent une étendue de pays assez grande pour que la centième partie d'un degré de latitude (quantité d'ailleurs plus grande que l'erreur que l'on commet en réalité) soit inappréciable à l'échelle de la carte.

Dans les autres cas, il est facile de tenir compte de l'aplatissement aux pôles ; d'après ce que nous avons dit, en effet, les coordonnées des différents points d'une carte, les éléments qui servent à en construire le canevas, peuvent toujours être considérés comme des fonctions des coordonnées et des éléments correspondants de la surface que l'on veut représenter, la forme de ces fonctions étant définie par

la loi qui préside à la construction. Au lieu de faire intervenir, dans ces fonctions, les éléments d'une sphère, il sera tout aussi facile de considérer les éléments d'un sphéroïde; ces éléments étant eux-mêmes en chaque point des fonctions connues de la latitude et de la longitude géographique, les coordonnées de la projection pourront toujours être exprimées, théoriquement du moins, par des fonctions de ces mêmes variables.

Nous reviendrons en détail sur ce sujet lorsque nous nous occuperons de la théorie mathématique des cartes au point de vue de la conservation des configurations, des distances ou des surfaces; et, dans chaque système que nous étudierons en particulier, nous donnerons le moyen de tenir compte de la forme elliptique de la terre.

Nous allons donner ici, sans les démontrer, les formules qui expriment les divers éléments du sphéroïde en fonction des éléments connus et des variables longitude t, et latitude l qui déterminent la position de chaque point à la surface de la terre.

3. La terre peut être considérée comme un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire comme décrit par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe dont les extrémités sont appelés pôles de la terre (fig. 1). Tout plan passant par cet axe coupe la surface suivant une ellipse dont on désigne le petit axe par $2b$, le grand axe par $2a$, et tout plan perpendiculaire trace une circonférence dont le rayon varie avec la distance de ce plan au pôle; l'équateur, c'est-à-dire l'intersection du sphéroïde par un plan perpendiculaire à son axe et également distant des deux pôles, a évidemment pour rayon a.

On appelle excentricité e, le rapport $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2}}$; ainsi,

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

aplatissement α, le rapport $\frac{a-b}{a}$; ainsi,

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Il en résulte

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Comme l'aplatissement de la terre diffère peu de $\frac{1}{300}$, on peut, dans la plupart des cas, négliger α^2 et prendre

$$e^2 = 2\alpha,$$

ce qui revient à négliger les puissances quatrième et suivantes de l'excentricité, car

$$\alpha = 1 - (1 - e)^{\frac{1}{2}} = 1 - (1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^4 - \ldots\ldots) = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4 + \ldots\ldots$$

Si l'on supposait la terre sphérique et d'un rayon a égal au demi grand axe du sphéroïde, les plans des méridiens seraient les mêmes pour les deux surfaces; ainsi les longitudes t comptées à partir d'un même premier méridien sont indépendantes de l'aplatissement. Il n'en est pas de même des latitudes l. Sur la sphère la latitude est l'angle du rayon au point que l'on considère avec l'équateur; sur le sphéroïde c'est l'angle de la normale au point considérée avec le grand axe, et l'angle l' de l'équateur avec le rayon qui joint le même point de la surface au centre de l'ellipsoïde prend le nom de *latitude géocentrique*.

Ces deux latitudes l et l' sont liées entre elles par la relation

$$a^2 \operatorname{tang} l' = b^2 \operatorname{tang} l,$$

ou

$$\operatorname{tang} l' = (1 - \alpha)^2 \operatorname{tang} l = (1 - e^2) \operatorname{tang} l.$$

La différence NMC $= l - l' = i$ peut s'exprimer par la formule

$$\operatorname{tang} i = \alpha \sin 2l - \alpha^2 \sin l \cos 3l - \alpha^3 \sin^2 l \sin 4l \ldots\ldots$$

que l'on remplace ordinairement par

$$i = \frac{\alpha \sin 2l}{\sin 1''}.$$

La normale MN $=$ N au point dont la latitude est l est exprimée par

$$\mathrm{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = a(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l),$$

en négligeant comme précédemment les termes en e^4, e^6.....

Le rayon de courbure ρ du méridien est exprimé par

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{N}^3 \frac{1 - e^2}{a^2} = a(1 - e^2)(1 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l).$$

Le rayon CM $=$ R est exprimé par

$$\mathrm{R} = a\sqrt{\frac{1 - e^2(2 - e^2)\sin^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l}} = a\sqrt{\frac{1 + (1 - e^2)\operatorname{tang}^2 l}{1 + (1 - e^2)\operatorname{tang}^2 l}} = a\sqrt{\frac{\cos l}{\cos l' \cos(l - l')}}.$$

Le rayon r du parallèle de latitude l qui, dans l'hypothèse de la terre sphérique, est exprimé par

$$a \cos l,$$

a pour expression, sur le sphéroïde,

$$r = \frac{a \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{N} \cos l.$$

Appelons s la longueur d'un arc de méridien se terminant à la latitude l; on aura

$$ds = \frac{a(1 - e^2)dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \rho dl = adl(1 - e^2 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l),$$

équation qui donne approximativement la distance itinéraire entre deux lieux voisins situés sur le même méridien et dont la différence des latitudes est dl : on devra prendre pour l la latitude du milieu de cette petite distance.

Si l'on veut traduire des arcs terrestres en secondes de degrés, et réciproquement, des nombres de secondes en distances linéaires, on se servira de la formule

$$\Delta = a\delta(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l) = \mathrm{N}\delta,$$

dans laquelle Δ désigne la distance de deux lieux très-voisins, δ l'arc correspondant décrit du point de rencontre des normales avec un rayon égal à l'unité (fig. 2).

En appelant δ'' le nombre de secondes du petit arc δ, on aura

$$\delta = \delta'' \sin 1'',$$

d'où

$$\delta'' = \frac{\Delta(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''} = \frac{\Delta}{a \sin 1''}(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l).$$

Un arc s de méridien se terminant d'un côté à l'équateur et de l'autre au parallèle de latitude l est exprimé par la formule

$$s = a(1 - e^2)(\mathrm{A}l - \tfrac{1}{2}\mathrm{B} \sin 2l + \tfrac{1}{4}\mathrm{C} \sin 4l \ldots\ldots),$$

dans laquelle

$$\mathrm{A} = 1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4,$$
$$\mathrm{B} = \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{15}{16} e^4,$$
$$\mathrm{C} = \tfrac{15}{64} e^4.$$

La différence $s - s' = S$ de deux arcs de méridiens, c'est-à-dire l'arc S de méridien dont les latitudes des extrémités sont l et l', est exprimée par la formule

$$S = a(1-e^2)\,[A(l-l') - B\sin(l-l')\cos(l+l') + \tfrac{1}{2}C\sin 2(l-l')\cos 2(l+l')].$$

Dans ces formules, les arcs s et S sont exprimés par la même unité que a, soit en mètres, soit en degrés de l'équateur si l'on prend pour a la valeur

$$a = \frac{180}{\pi} = 57°,2957793.$$

Pour la commodité des calculs on devra diviser le premier terme $A(l - l')$ du développement de s, par le nombre

$$\mu = \frac{180°}{\pi} \text{ et remplacer } l - l' \text{ par } \frac{l-l'}{\mu}.$$

La valeur du complément du logarithme de μ est

$$c^t \log \mu = \bar{2},24187737.$$

De la sorte $l - l'$ désignera le nombre de degrés de la différence des latitudes extrêmes.

Faisons $l = l' + 1°$; la longueur D_m de l'arc de 1° du méridien à la latitude l sera

$$\frac{a\pi(1-e^2)}{180°(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$D_m = a(1-e^2)\,[A \operatorname{arc} 1° - B\sin 1°\cos(2l+1°) + \tfrac{1}{2}C\sin 2°\cos 2(2l+1°)].$$

L'arc de 1° de longitude, c'est-à-dire l'arc d'un degré du parallèle dont la latitude est l, sera

$$D_p = \frac{a\pi\cos l}{180°(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{180°}N\cos l = \frac{N\cos l}{\mu},$$

expression qui se réduit évidemment à

$$\frac{a\pi\cos l}{180},$$

si l'on suppose la terre sphérique.

C'est d'après les deux équations D_m et D_p qu'a été construite la

table I, en prenant pour a et e^2 les valeurs qui conviennent à l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{299,15}$.

Si, dans l'équation qui donne s, nous faisons $l = 90° = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons le quart Q du méridien elliptique, c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur

$$Q = \tfrac{1}{2}\, a(1 - e^2)\, A\pi = \tfrac{1}{2}\, \pi a(1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4 \,.....);$$

ou, plus simplement, en négligeant e^4,

$$Q = \tfrac{1}{2}\, \pi a \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

équations dans lesquelles les longueurs q et a sont exprimées par la même unité.

Enfin la surface Z d'une zone du sphéroïde comprise entre l'équateur et le parallèle de latitude l est exprimée par

$$Z = 2\pi a^2(1 - e^2)\left(\sin l + \frac{2e^2}{3} \sin^3 l + \frac{3e^4}{5} \sin^5 l + ...\right),$$

équation qui se réduit à

$$Z = 2\pi a^2 \sin l,$$

lorsqu'on suppose la terre sphérique.

Si, par la verticale d'un lieu, on mène deux plans perpendiculaires entre eux et dont l'un passe par les pôles de la sphère céleste, ils intercepteront sur cette surface deux grands cercles. Les pieds des normales menées des différents points de leurs circonférences sur la terre formeront le *méridien* et la *perpendiculaire au méridien* en ce lieu. La première de ces courbes est plane parce que la surface terrestre est considérée comme un ellipsoïde de révolution. Elle se confond à son origine avec la méridienne du lieu qui n'est autre chose que l'intersection du plan du méridien avec l'horizon. La seconde est à double courbure; néanmoins on peut la considérer dans une certaine étendue comme faisant partie de la section de la surface terrestre par le plan mené perpendiculairement au méridien suivant la verticale du lieu. On démontre que, dans cette hypothèse, ***la méridienne est la section normale de plus grande courbure***, et que ***la perpendiculaire est, au contraire, celle de plus petite courbure***. Le rayon de courbure de la méridienne est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}},$$

et celui de la perpendiculaire

$$\rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

MÉTHODE DE PRONY POUR TENIR COMPTE DE L'APLATISSEMENT.

4. Quelque simple que soit la manière de tenir compte de la forme elliptique de la terre, il se présente bien des cas où la simplicité de la construction des cartes particulières de peu d'étendue et quelquefois même une propriété importante de la projection, tient essentiellement à l'hypothèse de la terre sphérique et où il serait cependant utile d'avoir égard à sa véritable figure. C'est dans ce but que Prony a cherché à déterminer « la position du centre et la longueur du rayon « de la sphère dont la surface s'approche le plus de coïncider avec « celle du sphéroïde terrestre dans le périmètre du pays dont on doit « former la carte (1). »

Il est d'abord évident que le rayon R de cette sphère est situé sur la normale à la surface de la terre menée par le centre de figure de pays, et que le plan du méridien elliptique passant par ce centre détermine, par son intersection avec la surface de la sphère, un méridien correspondant.

Supposons d'abord le périmètre du pays à peu près circulaire ; le centre de la sphère cherchée se trouvera alors sur la normale à la surface du sphéroïde, passant par le centre du périmètre pris sur la même surface, et il ne s'agit plus que de trouver la longueur R du rayon. Or il est évident que cette longueur sera celle qui donnera les moindres erreurs sur les arcs de méridienne et de perpendiculaire qui se croisent au point central H dont la latitude est λ et dont les rayons de courbure sont respectivement ρ et ρ', car c'est sur ces arcs mêmes que les plus grandes anomalies ont lieu avec des signes différents sur l'un et sur l'autre. Soient donc

$$\frac{R}{\rho} = 1 + \varepsilon, \quad \text{et} \quad \frac{\rho'}{R} = 1 + \varepsilon';$$

(1) *Connaissance des temps* pour 1808, p. 371.

les erreurs sur la méridienne et la perpendiculaire seront dues respectivement à ε et à ε', et leur somme numérique sera

$$\varepsilon + \varepsilon' = \frac{R}{\rho} + \frac{\rho'}{R} - 2.$$

Alors, cherchant la valeur de R qui rend cette somme un *minimum*, on obtiendra

$$R = \sqrt{\rho\rho'} = a\sqrt{\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}} = a[1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda-e^4(\tfrac{1}{8}+\ldots)],$$

c'est-à-dire que le rayon de la sphère qui jouit de la propriété demandée est moyenne géométrique entre ceux de plus grande et de plus petite courbure. Ces deux rayons sont si peu différents que la moyenne arithmétique $\frac{\rho+\rho'}{2}$ est à très-peu près égale à la moyenne géométrique $\sqrt{\rho\rho'}$ et pourra lui être substituée.

Prenons maintenant sur la surface du sphéroïde un périmètre quelconque; la détermination du centre de figure n'ayant pas besoin d'être faite avec une extrême rigueur, on se servira pour cette opération des cartes géographiques ordinaires, et l'on tracera un polygone qui coïncide autant que possible avec le périmètre donné; le centre de gravité de la surface de ce polygone, déterminé par les méthodes connues, sera le centre cherché (1).

(1) Pour trouver le centre de gravité d'un polygone tel que ABCDEFH (fig. 3), on trace deux axes rectangulaires à volonté dont l'un peut passer par l'un des côtés mêmes du polygone, par le plus grand, par exemple, et l'on décompose la surface en rectangles et en triangles rectangles par des droites menées par les sommets parallèlement aux axes, comme l'indique la figure. Le centre de gravité de chaque triangle est situé sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base et au tiers de cette droite à partir de la base; le centre de gravité de chaque rectangle est à l'intersection de ses deux diagonales. Supposons donc tous ces centres de gravité déterminés; soient x, x' x''... leurs distances à l'axe oy; a, a', a''... les aires des triangles ou rectangles correspondants; la distance X du centre de gravité cherché au même axe oy sera donnée par la formule

$$X = \frac{ax + a'x' + a''x'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}.$$

En appelant de même y, y', y''... les distances des divers centres de gravité à l'axe ox, la distance du centre cherché sera

$$Y = \frac{ay + a'y' + a''y'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}.$$

Le centre de gravité du polygone pourra donc se construire facilement à l'aide de ses deux coordonnées X et Y.

Si ces constructions et ces mesures se font sur un canevas préalable ayant la propriété de peu altérer les distances, elles seront beaucoup abrégées.

Soient ρ et ρ' les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface terrestre, α l'aplatissement, ψ l'angle qu'une section normale quelconque ayant R' pour rayon forme avec la section de plus petite courbure qu'est celle perpendiculaire au méridien ; soit enfin λ la latitude de centre de figure de la carte. La géodésie donne les formules

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = a\left[1-\frac{\alpha}{2}(1+3\cos 2\lambda)\right],$$

$$\rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = a\left[1+\frac{\alpha}{2}(1-\cos 2\lambda)\right],$$

$$R' = \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'-(\rho'-\rho)\cos 2\psi} = a[1-\alpha(\cos 2\lambda - \cos^2\lambda\cos 2\psi)],$$

ou bien, faisant pour abréger

$$\cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi = m,$$

on aura

$$R' = a(1-\alpha m).$$

Cela posé, désignons par A_1, A_2, A_3... les longueurs des arcs produits à la surface du sphéroïde par des sections de plans normaux faites au centre de figure, longueurs comprises entre ce centre et les angles du polygone qui approche le plus du périmètre donné et qu'il suffira de mesurer sur la carte préliminaire qui nous a déjà servi pour trouver le centre de figure ; désignons encore par r_1, r_2, r_3... les rayons de courbure de ces sections, par R' l'un quelconque de ces rayons, enfin par R le rayon de la sphère dont la surface s'approche le plus de coïncider avec celle du sphéroïde terrestre.

On aura en général, pour l'erreur ε commise sur la valeur angulaire de l'arc A,

$$\varepsilon = \frac{A}{R} - \frac{A}{R'} = \frac{A(R'-R)}{RR'},$$

ou, sans erreur sensible,

$$\varepsilon = \frac{A(R'-R)}{R'^2},$$

puisque cette dernière expression ne diffère de la précédente que par des termes de l'ordre $(R'-R)^2$ et des ordres supérieurs, et que la différence $R'-R$ doit toujours être plus petite que l'excès du

rayon de l'équateur sur celui du pôle. Ainsi les erreurs angulaires relatives aux arcs A_1, A_2, A_3... seront respectivement

$$\varepsilon_1 = \frac{A_1(r_1 - R)}{R'^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{A_2(r_2 - R)}{R'^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{A_3(r_3 - R)}{R'^2} \ldots\ldots$$

Appliquons la méthode des moindres carrés qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs; on aura

$$d\left[\frac{A^2_1(r_1 - R)^2 + A^2_2(r_2 - R)^2 + A^2_3(r_3 - R)^2 + \ldots\ldots}{R'^4}\right] = 0,$$

d'où l'on tire après la différentiation

$$R = \frac{A^2_1 r_1 + A^2_2 r_2 + A^2_3 r_3 + \ldots\ldots}{A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 + \ldots\ldots}; \qquad \text{(I)}$$

mais, d'après ce qui précède, les rayons de courbure des sections normales sont

$$r_1 = a(1 - \alpha m_1)$$
$$r_2 = a(1 - \alpha m_2)$$
$$r_3 = a(1 - \alpha m_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

expressions dans lesquelles

$$m_1 = \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_1$$
$$m_2 = \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_2$$
$$m_3 = \cos 2\lambda - \cos^2\lambda \cos 2\psi_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et où ψ_1, ψ_2, ψ_3... sont les angles que les sections normales font avec la perpendiculaire au méridien central; par conséquent, l'équation (I) prendra la forme suivante :

$$\frac{R}{a} = 1 - \alpha\left(\frac{A^2_1 m_1 + A^2_2 m_2 + A^2_3 m_3 + \ldots\ldots}{A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 + \ldots\ldots}\right).$$

Soient encore, pour abréger,

$$\frac{A_2}{A_1} = n_2; \quad \frac{A_3}{A_1} = n_3; \quad \ldots\ldots;$$

on aura enfin

$$\frac{R}{a} = 1 - \alpha\left(\frac{m_1 + m_2 n^2_2 + m_3 n^2_3 + \ldots\ldots}{1 + n^2_2 + \ldots\ldots}\right). \qquad \text{(II)}$$

L'expression du degré de la sphère dont R est le rayon se déduit de celle-ci :

$$1^\circ = \frac{\pi R}{180},$$

dans laquelle R devra être remplacé par sa valeur précédente, et π par 3,1416 ; ainsi l'on a

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} a \left(1 - \alpha \frac{m_1 + m_2 n^2_2 + m_3 n_3 + \dots..}{1 + n^2_2 + n^2_3 + \dots..}\right) = \frac{\pi a}{180}(1 - \alpha U).$$

Mais la géodésie donne la formule

$$a = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right),$$

dans laquelle $Q = 10{,}000{,}000$ mètres, c'est-à-dire le quart du méridien ; on a donc

$$1^\circ = \frac{Q}{90^\circ}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(1 - \alpha U),$$

ou, en développant et s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$1^\circ = \frac{Q}{90^\circ} + \frac{\alpha Q}{180}(1 - 2U),$$

et définitivement en remettant pour U sa valeur,

$$1^\circ = \frac{Q}{90} + \frac{\alpha Q}{180}\left[1 - \frac{2(m_1 + m_2 n^2_2 + m_3 n^2_3 + \dots..)}{1 + n^2_2 + n^2_3 + \dots..}\right],$$

formule dans laquelle α devra être remplacé par la valeur que nous adoptons $\frac{1}{299{,}15}$.

Dans ce calcul les arcs A_1, A_2, A_3... qui aboutissent tous au centre de la carte et se terminent au périmètre de l'espace à représenter, sont supposés très-petits ; mais s'ils excédaient 4 ou 5 degrés, il conviendrait, pour plus d'exactitude, de prendre les rayons de courbure correspondants au milieu de ces arcs.

Nous avons supposé ces mêmes arcs mesurés sur une carte géographique, mais on peut aussi calculer les valeurs de ces arcs à l'aide de la formule

$$D = \frac{\pi\rho}{180^\circ}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\frac{e^2}{1 - e^2}\sin 2\lambda \sin^2\psi + \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2\lambda \cos\psi\right),$$

dans laquelle D désigne l'arc de 1° d'une section oblique faite dans l'ellipsoïde à la latitude λ par un plan vertical faisant l'angle ψ avec la perpendiculaire au méridien; l'excentricité e^2 pourra être prise égale à 2α ou, plus exactement, à $\alpha\,(2-\alpha)$, soit 0,00667437 dans le cas où α est pris égal à $\frac{1}{299,15}$.

DÉTERMINATION DES POINTS SUR LE CANEVAS.

5. Nous avons dit que, les points du globe se déterminant par leur latitude et leur longitude, on cherchait, dans toute projection, à tracer d'abord le canevas, c'est-à-dire l'ensemble des parallèles et des méridiens, puis à placer les différents lieux par rapport à ces lignes comme ils le sont sur la sphère par rapport aux cercles de latitude et de longitude. Nous nous occuperons, dans ce qui suivra, du tracé des méridiens et des parallèles de la projection, mais nous ne nous arrèterons pas sur la seconde partie de la question qui est purement graphique et déjà familière à toutes les personnes qui s'occupent de dessin : nous dirons seulement que toutes les fois que les lignes des coordonnées géographiques ne seront pas rectilignes, on devra les tracer assez rapprochées pour que la détermination des points intermédiaires se fasse dans chaque quadrilatère avec toute l'exactitude désirable; on aura satisfait le mieux possible à cette condition si, à l'échelle de la construction, chaque côté du quadrilatère considéré peut être regardé sans erreur appréciable comme une ligne droite, parce qu'alors le point cherché se placera, à l'aide de la règle et du compas, par les différences entre sa longitude et sa latitude et celles des côtés méridien et parallèle de ce quadrilatère.

Remarquons ici que, dans la construction d'une carte, on pourra toujours adopter pour premier méridien celui d'un lieu quelconque préalablement désigné et compter les longitudes des autres lieux à l'est et à l'ouest de celui-ci; il suffira pour cela de remplacer les longitudes comptées à partir du méridien de Paris, par exemple, par les différences entre ces longitudes et celle du lieu dont le méridien sera pris pour départ.

Soit, par exemple, (fig. 4) 45° 23′ N. la latitude du point donné et 5°4′ O. sa longitude à l'ouest du méridien à partir duquel on compte les longitudes. Supposons les méridiens et les parallèles tracés de 10

en 10 minutes ; on prendra, à l'aide du compas de proportion, les longueurs DH, BG respectivement égales aux $\frac{6}{10}$ des arcs de parallèles CD et AB, et les longueurs DE, CF respectivement égales aux $\frac{3}{10}$ des arcs de méridien BD et AC ; on joindra GH, FE, et l'intersection M donnera la position du point d'une manière très-approchée.

Lorsque l'on a placé sur la carte par leur latitude et leur longitude les sommets d'une triangulation, on a souvent à placer les sommets d'une triangulation secondaire dont on n'a pas calculé les coordonnées géographiques, c'est-à-dire à projeter sur la carte un triangle dont la projection de la base est déjà connue. Voici comment on résoudra graphiquement cette question en supposant que les projections des côtés du triangle soient des lignes droites et que les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles de la carte puissent être, sans erreur sensible, considérés comme des parallélogrammes, hypothèse qui se vérifiera le plus souvent sur les cartes de détail.

On construira d'abord (fig. 5), sur l'un des côtés CD du parallélogramme où se trouve la projection MN de la base, le rectangle A'B'CD ; puis, en menant Mm', Nn' parallèles au côté CD et prenant $M'm' = Mm$ et $N'n' = Nn$, on passera de la projection donnée MN à la projection de cette base dans le rectangle A'B'CD. Sur la nouvelle base M'N' on construira sans altération le triangle donné M'N'P' et l'on projettera le sommet P' dans le parallélogramme en menant $P'p'$ parallèle à CD et prenant $Pp = P'p'$; le triangle PMN sera le triangle cherché.

Si l'on voulait résoudre ce problème par le calcul, il faudrait déterminer la projection des angles adjacents à la base donnée MN, ce qui exigerait que l'on eût une formule pour déterminer la projection d'un angle formé sur le sphéroïde par un méridien et une autre ligne quelconque de plus courte distance, car tout angle étant toujours la différence des azimuts de ses côtés, il est évident que sa projection sera aussi la différence des projections de ces mêmes azimuts. En étudiant chacune des projections applicables aux cartes particulières, nous donnerons le moyen de calculer la projection d'un angle donné sur le sphéroïde.

On a souvent à résoudre ce problème inverse de celui que nous venons de traiter : ***Déterminer la latitude et la longitude d'un point donné sur la projection.***

Lorsque la carte que l'on considère est une mappemonde ou une carte générale, on ne peut pas compter sur une grande exactitude, et la latitude et la longitude cherchée se déterminent le plus souvent

à vue en se représentant le méridien et le parallèle qui passeraient par le point donné et les intersections de ces courbes avec les côtés du quadrilatère où est situé ce point. Il est inutile d'ajouter que ce méridien et ce parallèle devront être exactement tracés toutes les fois qu'il sera possible de le faire, et prolongés jusqu'à celles de ces courbes qui portent la graduation en degrés et fractions de degré.

Dans les cartes particulières, si les méridiens et les parallèles sont assez rapprochés pour que les quadrilatères formés par ces lignes puissent être considérés comme des parallélogrammes, on résoudra très-simplement la question qui nous occupe en menant par le point donné deux droites respectivement parallèles aux côtés de ce quadrilatère préalablement divisés en degrés et minutes, et l'on connaîtra, à l'aide des divisions dont il s'agit et de la graduation marquée autour de la carte, la latitude et la longitude du point donné.

Si le quadrilatère dans lequel est renfermé ce point, tout en étant sensiblement rectiligne, ne pouvait pas être réellement assimilé à un parallélogramme, les deux droites à mener dans le sens des parallèles et des méridiens devraient concourir avec ces lignes. Soit (fig. 6) ABCD le quadrilatère dans lequel est le point donné M; on mènera la droite *a*M*d* parallèle à AD et l'on déterminera le point *m* sur AD par l'égalité

$$\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{AD}} = \frac{a\mathrm{M}}{ad}.$$

L'emploi du compas de proportion permettra de déterminer facilement la longueur A*m*; la droite *m*M*m'* pourra être considérée comme le parallèle du point M, et la graduation de *m* sur AD ou de *m'* sur BC préalablement divisés en degrés et fractions, donnera la latitude cherchée; il sera même inutile de partager AD ou BC en parties égales, car le compas de proportion donnera la fraction de AD que représente la longueur *m*A. En opérant de même pour les côtés AB, CD, on déterminera la longitude du point donné M.

Il arrive souvent, dans la construction des mappemondes et des cartes générales, que la position des lieux secondaires et les détails de la topographie sont donnés, non plus par leurs coordonnées géographiques, mais sur une carte déjà construite sur une autre projection à une échelle au moins égale à celle que l'on veut tracer. On devra alors partager les deux projections en quadrilatères correspondants par des méridiens et des parallèles assez rapprochés pour que

ces quadrilatères puissent être considérés comme rectilignes, et opérer dans chacun d'eux la réduction des détails en prenant pour point de départ les points principaux préalablement placés par leur longitude et leur latitude.

ÉVALUATION DES DISTANCES.

6. L'échelle de la carte se détermine toujours par la valeur que l'on assigne au degré de l'équateur, soit que l'on prenne ce degré pour unité, soit que l'on fixe l'échelle naturelle, c'est-à-dire la fraction de mètre qui, sur le dessin, devra représenter une distance de 1 mètre au point que l'on considère. De l'impossibilité d'obtenir une projection conservant toutes les distances, il résulte évidemment que la même échelle ne peut s'appliquer exactement dans toutes les directions aux différents points de la carte, et que, même en supposant la terre sphérique, la valeur du degré ou, si l'on veut, de la minute de grand cercle, ne pourra être représentée partout par la même longueur. En traitant de chaque système de projection en particulier, nous indiquerons la manière de tracer l'échelle correspondante et, toutes les fois que cela sera possible, la construction qui permettra de passer de cette échelle approchée à la détermination de la distance réelle de deux lieux.

On pourra d'ailleurs toujours calculer la distance exacte de deux points donnés par leur latitude et leur longitude. En appelant Δ cette distance, θ la différence $t-t'$ des longitudes de ces deux points, l et l' les latitudes, le triangle sphérique ayant pour sommets le pôle et les deux points considérés donnera

$$\cos\Delta = \sin l \sin l' + \cos l \cos l' \cos\theta.$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, on cherchera d'abord l'angle auxiliaire φ à l'aide de la formule

$$\cot\varphi = \cot l \cos\theta,$$

et l'on aura ensuite

$$\cos\Delta = \frac{\sin l \cos(l' - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Si les angles θ et $(l-l')$ sont moindres que trois degrés, on pourra employer pour plus de commodité les formules suivantes qui donneront une approximation presque toujours suffisante :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\theta}{l-l'}\cos\frac{l+l'}{2},$$

et

$$\Delta = \frac{l-l'}{\cos\varphi}.$$

Si l'on voulait, dans le calcul de la distance de deux lieues, tenir compte de l'aplatissement de la terre, on se servirait des formules données par Puissant (1). Ce problème, considéré dans toute sa généralité, n'est guère utile en géographie, car, outre que les formules sont très-compliquées, à quoi peut servir de connaître la plus courte distance de Paris à Saint-Pétersbourg avec une exactitude qui n'existe même pas dans la nature, à cause des mille accidents de localité qui forcent d'allonger la route d'au moins un quart? Il est vrai que lorsqu'on compare deux stations voisines d'une triangulation il peut être très-utile d'en connaître la distance exacte d'après leurs latitudes et longitudes; mais le problème appartient alors à la géodésie et sort du domaine de la géographie; nous n'avons donc pas à l'étudier.

Voici une construction graphique qui, dans la plupart des cas, déterminera avec une exactitude suffisante la distance de deux points de la sphère quand on connaîtra soit directement, soit sur une carte géographique, leurs latitudes et la différence de leurs longitudes.

Soient (fig. 7) A et B les deux points considérés, P le pôle, EE' l'équateur. Dans le méridien de chacun de ces points nous connaissons la perpendiculaire qui le projette sur l'équateur et qui est la demi-corde de l'arc double de sa latitude; nous connaissons en outre l'angle des intersections de ces méridiens avec l'équateur qui est égal à la différence des longitudes des deux points; il est donc facile de construire le trapèze ABab dont le côté AB servira à évaluer l'arc de grand cercle qu'il sous-tend, c'est-à-dire la distance cherchée.

Nous ferons donc (fig. 8) au centre d'un cercle divisé en degrés et fractions un angle égal à la différence donnée des longitudes; sur chaque côté de cet angle nous porterons respectivement des longueurs égales aux cosinus des latitudes données en construisant les triangles AaO, BbO ayant le rayon pour hypoténuse et la latitude correspondante pour angle au centre; puis nous porterons, sur les perpendiculaires élevées en a et b à la corde ab, les longueurs des côtés

(1) *Traité de géodésie.*

aA, bB de ces triangles; $A'B'$ sera la corde de l'arc de grand cercle compris sur la sphère entre les deux lieux proposés ; en la portant sur la circonférence divisée, l'arc qu'elle sous-tendra mesurera la plus courte distance des deux lieux.

Si la latitude du point A étant australe, celle du point B était boréale, la construction pour le point A se ferait au-dessous du rayon Oa, et la corde de l'arc cherché serait A'_1B'.

TRACÉ DES CARTES CÉLESTES A L'AIDE DES COORDONNÉES ASTRONOMIQUES.

7. Si, en géographie, un point est défini par sa *latitude* et sa *longitude*, c'est-à-dire par sa distance à l'équateur et par l'angle que fait son méridien avec un autre méridien connu, il n'en est pas toujours ainsi en astronomie; la position d'un astre est le plus souvent définie par sa latitude et sa longitude astronomique, c'est-à-dire par sa distance à l'écliptique, et par l'angle que fait le grand cercle perpendiculaire à l'écliptique et passant par l'astre avec celui qui passe par le point équinoxial (intersection de l'équateur et de l'écliptique). Les premières coordonnées de cet astre, sa latitude et sa longitude terrestre, prennent alors le nom de *déclinaison* et d'*ascension droite.*

Si nous supposons que les méridiens et les parallèles à l'équateur aient été tracés sur une projection, nous sommes conduits à chercher les projections des grands cercles perpendiculaires à l'écliptique et des petits cercles parallèles, afin de pouvoir placer ensuite chaque astre par sa latitude et sa longitude céleste.

Cherchons d'abord les points d'intersection des méridiens de la projection avec un petit cercle parallèle à l'écliptique; soit β la latitude astronomique de ce parallèle, α l'ascension droite du méridien déjà tracé, δ la déclinaison cherchée du point d'intersection, e l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur (environ $23°28'$). Dans le triangle sphérique (fig. 9) ayant pour sommets les pôles P et π de l'équateur et de l'écliptique, et le point d'intersection cherché S, l'angle en P est égal à $90° + \alpha$, le côté opposé πS à $90° - \beta$, et le côté πP à e; nous pourrons donc calculer le troisième côté $PS = 90° - \delta$ qui déterminera le point S sur la projection.

Nous nous servirons pour cela des formules

$$\tang \varphi = -\sin \alpha \tang e,$$
$$\sin(\delta + \varphi) = \frac{\sin \beta \cos \varphi}{\cos e}.$$

Par exemple, si la latitude du parallèle à l'écliptique est de 40°, l'ascension droite du méridien de la projection de 30°, nous trouverons

$$\varphi = -12°15' \quad \text{et} \quad \delta = 53°28'.$$

En donnant à α successivement les valeurs 0°, 10°, 20°... et réunissant ensuite tous les points obtenus par une même courbe, on obtiendra la projection du parallèle céleste considéré. On opérera de même pour autant de parallèles que l'on voudra en donnant successivement à β les valeurs 10°, 20°...

Pour obtenir l'écliptique il suffira de faire $\beta = 0$; dans ce cas

$$\delta + \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = -\varphi ;$$

la déclinaison cherchée des points où les méridiens traversent l'écliptique est alors donnée par la formule

$$\text{tang}\,\delta = \sin\alpha\ \text{tang}\,e,$$

dans laquelle on donnera à α les valeurs successives 0°, 10°, 20°...

Cherchons maintenant les intersections des méridiens de la carte avec un grand cercle passant par les pôles de l'écliptique et perpendiculaire sur lui ; soit λ sa longitude connue. Dans le triangle sphérique déjà considéré $P\pi S$, on connaît l'angle au pôle π qui est égal à $90° - \lambda$, l'angle au pôle P qui est égal à $90° + \alpha$, et le côté $P\pi = e$; on cherche le côté PS qui est égal à $90° - \delta$. Nous emploierons les formules

$$\text{tang}\,\psi = \cos e\ \text{cotang}\,\lambda,$$
$$\text{tang}\,\delta = \frac{\text{cotang}\,e\ \cos(\alpha + \psi)}{\sin\psi}.$$

Par exemple, si la longitude $\lambda = 60$, l'ascension droite $\alpha = 55°$, on trouve

$$\psi = 27°54', \quad \delta = 31°19'.$$

En cherchant le point où ce grand cercle de longitude λ traverse le méridien dont l'ascension droite est 70°, on a

$$\psi = 27°54' \quad \text{et} \quad \delta = -34°5',$$

le signe — devant la valeur de δ indique que le point cherché a une déclinaison australe, c'est-à-dire qu'il se trouve dans le méridien donné à 34° 5' au-dessous de l'équateur.

En donnant à α successivement les valeurs 0°, 10°, 20°... et réu-

nissant les points obtenus par une courbe, on tracera le grand cercle de longitude astronomique λ ; en donnant ensuite à λ les valeurs 0°, 10°... on tracera autant de grands cercles perpendiculaires à l'écliptique que l'on voudra, et l'on pourra alors placer tous les astres par leurs coordonnées astronomiques.

La table suivante donne les déclinaisons des points de l'écliptique dont les ascensions droites varient de 5° en 5°.

Table de construction de l'écliptique.

ASCENSIONS DROITES.		DÉCLINAISONS.	ASCENSIONS DROITES.	
0°	180°	0° 0′	180°	360°
5	175	2 10	185	355
10	170	4 19	190	350
15	165	6 25	195	345
20	160	8 27	200	340
25	155	10 24	205	335
30	150	12 15	210	330
35	145	13 59	215	325
40	140	15 35	220	320
45	135	17 4	225	315
50	130	18 24	230	310
55	125	19 35	235	305
60	120	20 36	240	300
65	115	21 29	245	295
70	110	22 12	250	290
75	105	22 45	255	285
80	100	23 9	260	280
85	95	23 24	265	275
90	90	23 28	270	270

TRACÉ DE L'ORBITE D'UN ASTRE SUR UNE PROJECTION.

8. Il sera aussi facile de tracer par points sur une projection l'orbite AB d'une comète ou d'une planète, orbite ordinairement donnée par son inclinaison BCE $=$ ♈CE $= n$ sur l'écliptique ♈e, et par la longitude ♈C $= k$ du *nœud ascendant*, c'est-à-dire du point d'intersection avec l'écliptique (fig. 9).

On déterminera en fonction de ces données l'inclinaison BAE $=$ N

de l'orbite sur l'équateur et l'ascension droite ♈A = K du nœud ascendant à l'aide des formules suivantes :

$$\cos N = \cos e \cos n - \sin e \sin n \cos k,$$
$$\operatorname{cotang} K = \frac{\operatorname{cotang} n \sin e + \cos e \cos k}{\sin k};$$

et, comme vérification, on devra avoir

$$\sin N \sin K = \sin n \sin k.$$

Quand on connaîtra N et K, on trouvera le point d'intersection M de l'orbite avec un méridien donné PD de la sphère céleste dont l'ascension droite ♈D sera représentée par α, à l'aide du triangle ADM rectangle en D. En appelant δ la déclinaison cherchée DM de ce point, on aura

$$\operatorname{tang} \delta = \sin(\alpha - K) \operatorname{tang} N.$$

Par exemple, pour la comète de 1811, on aurait

$$n = 106^\circ\, 57'\, 24'', \qquad k = 140^\circ 24'\, 30'', \qquad e = 23^\circ 27'\, 50'';$$

on trouve

$$N = 90^\circ\, 31'; \qquad K = 142^\circ\, 25'$$

donc

$$\operatorname{tang} \delta = 1{,}58679 \sin(\alpha - 142^\circ 25').$$

En faisant successivement $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 30^\circ$... on obtient

$$\delta = -87^\circ\, 34'; \qquad \delta = -87^\circ\, 59'; \qquad \delta = -88^\circ\, 15'; \qquad \delta = -88^\circ\, 24'.$$

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROJECTIONS.

9. Nous avons montré précédemment que la théorie générale des projections pouvait être ramenée au principe de la transformation des méridiens et des parallèles en d'autres lignes droites ou courbes tracées sur un plan d'après des conditions relatives aux propriétés que doit avoir la carte ; cette théorie est indépendante de la forme particulière attribuée à la surface de révolution que l'on considère, et suppose seulement qu'un point quelconque de cette surface est défini par l'arc de méridien s qui mesure sa distance au pôle et qui est une fonction connue de la latitude l, et par l'angle de ce méridien avec

celui que l'on prend pour premier méridien, c'est-à-dire par la longitude t.

Imaginons maintenant que le même lieu soit placé sur la carte géographique de manière que sa position soit déterminée par deux coordonnées rectangulaires x et y comptées à partir d'une origine quelconque. Ces deux variables x et y doivent dépendre de s et de t et par conséquent de l et de t, et l'on voit que si, dans ces fonctions on fait la variable t constante, on aura les coordonnées de la courbe qui représente le méridien dont la longitude est t ; au contraire, si l'on y fait s et par suite l constante, on aura les coordonnées de la courbe qui représente le parallèle auquel répond l'arc de méridien s.

Considérons sur l'ellipsoïde de révolution deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins se coupant respectivement en A, B, A', B' ; appelons a, b, a' b' les points correspondants de la carte et qui sont les extrémités d'arcs infiniment petits de méridiens et de parallèles de la projection. Les coordonnées de A étant s et t, celles de B seront s et $t + dt$, celles de A', $s + ds$ et t, et celles de B', $s + ds$, et $t + dt$. De plus si nous appelons r le rayon du parallèle de A, rayon qui, comme l'arc s, ne dépend que de la latitude l, nous pourrons exprimer les longueurs des côtés du petit quadrilatère considéré :

$$AB = r dt \quad \text{et} \quad AA' = ds.$$

Quant à la distance AB' elle sera évidemment exprimée par

$$AB' = \sqrt{r^2 dt^2 + ds^2}.$$

Considérons maintenant (fig. 10) le petit quadrilatère $aba'b'$ de la carte ; les coordonnées x, y de a étant fonctions de la latitude et de la longitude, celles de b s'obtiendront en faisant varier la longitude seule et cherchant l'accroissement correspondant de x et y ; elles pourront donc être représentées par $x + \frac{dx}{dt} dt$ et $y + \frac{dy}{dt} dt$. De même celles de a' pourront s'exprimer par $x + \frac{dx}{dl} dl$, et $y + \frac{dy}{dl} dl$; enfin celles de b' par $x + \frac{dx}{dl} dl + \frac{dx}{dt} dt$ et $y + \frac{dy}{dl} dl + \frac{dy}{dt} dt$.

Il en résulte que

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \frac{dx}{dl} dl, \quad \text{et que} \quad \beta'b' - \beta b = \alpha'a' - \alpha a = \frac{dy}{dl} dl,$$

ce qui montre que

$$aa' = bb' \quad \text{et que} \quad ab = a'b' \; .$$

c'est-à-dire que le quadrilatère ABA'B' est représenté par un parallélogramme $aba'b'$. Les côtés de ce parallélogramme sont

$$ab = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

$$aa' = dl\sqrt{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2}.$$

$$ab' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dl}dl + \frac{dx}{dt}dt\right)^2 - \left(\frac{dy}{dl}dl + \frac{dy}{dt}dt\right)^2}.$$

Enfin les angles de ab et aa' avec l'arc des abscisses ont respectivement pour tangentes

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}},$$

et l'angle du méridien et du parallèle est donné par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}}.$$

Si l'on veut que cet angle soit droit comme sur le sphéroïde, il faut que l'on ait

$$\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}} = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}.$$

Si l'on demandait que les deux figures ABA'B', $aba'b'$ fussent non-seulement semblables, mais égales, il faudrait :

1° que ab fût égal à AB :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2;$$

2° que aa' fût égal à AA'

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=\left(\frac{ds}{dl}\right)^2;$$

3° que l'angle baa' fût droit :

$$\frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}}=-\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}};$$

or si nous posons

$$\frac{\frac{dy}{dl}}{\frac{dx}{dl}}=\operatorname{tang}\varphi,$$

la troisième condition donnera

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\operatorname{cotang}\varphi;$$

par conséquent

$$\frac{dy}{dl}=\frac{dx}{dl}\operatorname{tang}\varphi \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{dx}{dt}\operatorname{cotang}\varphi.$$

Ces valeurs substituées dans les équations de condition donneront

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2=\left(\frac{ds}{dl}\right)^2\cos^2\varphi, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=r^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\frac{dx}{dl}=s'\cos\varphi, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}=r\sin\varphi.$$

en appelant s' la dérivée de s par rapport à l.

Or entre la différentielle totale et les différentielles partielles d'une fonction de deux variables on a les équations

$$dx=\frac{dx}{dl}dl+\frac{dx}{dt}dt,$$
$$dy=\frac{dy}{dl}dl+\frac{dy}{dt}dt,$$

qui deviennent, après la substitution des valeurs de $\frac{dx}{dl}$ et $\frac{dx}{dt}$,

$$dx=ds\cos\varphi-rdt\sin\varphi,$$
$$dy=ds\sin\varphi+rdt\cos\varphi.$$

Pour que les seconds membres soient des différentielles complètes comme les premiers, il faut que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dl}\right)=\frac{d}{dl}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dl}\right)=\frac{d}{dl}\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

ce qui transforme ainsi ces deux équations

$$-\frac{d\varphi}{dt}(s'\sin\varphi)=-\frac{dr}{dl}\sin\varphi-\frac{d\varphi}{dl}r\cos\varphi,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}(s'\cos\varphi)=\frac{dr}{dl}\cos\varphi-\frac{d\varphi}{dl}r\sin\varphi.$$

En multipliant la première par *cos* φ, la seconde par *sin* φ et ajoutant, on obtient

$$r\frac{d\varphi}{dl}=0,$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dl}=0;$$

la fonction φ doit donc être indépendante de la variable l. Mais si nous multiplions la seconde équation par *cos* φ, la première par *sin* φ et que nous retranchions, nous obtenons

$$\frac{d\varphi}{dt}s'=\frac{dr}{dl} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{dr}{dl}\cdot\frac{1}{s'};$$

comme r et s sont des fonctions de l, il en est de même de leurs dérivées (1) ; cette relation indique donc que φ est fonction de l; comme cette condition contredit la précédente, il en résulte, ce que nous savions déjà, qu'il est impossible de représenter exactement la surface du sphéroïde sur un plan.

Puisque nous ne pouvons rendre parfaitement égales les figures infiniment petites correspondantes du sphéroïde et de la carte, nous

---

(1) Nous avons trouvé, en appelant s un arc d'ellipse compté *à partir du pôle*,

$$ds=-\frac{(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad r=\frac{\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

On calcule $$dr=\frac{\sin l\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{donc} \quad \frac{\frac{dr}{dl}}{\frac{ds}{dl}}=-\sin l.$$

pouvons chercher à les rendre soit semblables, soit équivalentes. Nous aurons atteint le premier but si nous établissons que, sur la carte, les distances d'un point quelconque aux points infiniment voisins sont aux distances qui leur correspondent sur le sphéroïde dans un rapport qui ne dépend que de la position du premier point considéré. La similitude des distances entraînera évidemment celle des surfaces infiniment petites et par suite la conservation des angles; et réciproquement si les angles sont partout conservés, les surfaces infiniment petites seront nécessairement semblables et, autour de chaque point, les éléments différentiels seront dans un rapport constant avec les éléments qui leur correspondent sur la surface du sphéroïde.

Si, au lieu de la similitude des surfaces, on demande leur équivalence, on obtiendra les équations générales de tous les systèmes de projections qui satisfont à cette condition en égalant la surface d'un quadrilatère quelconque mais infiniment petit du sphéroïde à celle du parallélogramme rectiligne qui lui correspond.

Nous allons étudier successivement ces deux questions avec tous les développements qu'elles comportent.

CHAPITRE II.

PROJECTIONS SANS DÉFORMATION OU ORTHOMORPHES.

1. Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante à la conservation des angles et par suite à la similitude des surfaces était que les éléments différentiels autour d'un même point fussent dans un rapport constant avec les éléments qui leur correspondent sur la surface du sphéroïde.

Désignons par m ce rapport qui est fonction de la latitude l et de la longitude t.

L'équation fondamentale sera alors

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + r^2dt^2),$$

ou, en posant $mr = n$,

$$dx^2 + dy^2 = n^2\left[\left(\frac{ds}{r}\right)^2 + dt^2\right].$$

Cherchons quelle fonction de la latitude représente le rapport $\frac{ds}{r}$. Si nous désignons par z le complément de la latitude, c'est-à-dire l'angle de la normale avec l'axe des pôles, on aura $dz = -dl$, et par suite

$$\frac{ds}{r} = \frac{(1-e^2)dz}{(1-e^2\cos^2 z)\sin z} = \frac{dz}{\sin z} - \frac{e^2\sin z\,dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

expression qui se réduit à son premier terme dans le cas où la terre est supposée sphérique.

Le rapport $\frac{ds}{r}$ est donc une quantité intégrable que nous pouvons désigner par du. Dans le cas de la terre sphérique l'intégrale est

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos z}{1+\cos z} + \log K = \log K \operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

en appelant K une constante arbitraire. Si la terre est supposée elliptique, l'intégrale de $\frac{e^2 \sin z dz}{1-e^2\cos^2 z}$ est $\frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z}$; on aura donc en général

$$u=\log\left[\mathrm{K}\tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Si l'on appelle ζ un angle tel que l'on ait

$$\tang\frac{\zeta}{2}=\tang\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de u aura la même forme que dans le cas de la terre sphérique, car on aura alors

$$u=\log \mathrm{K}\tang\frac{\zeta}{2};$$

en sorte que l'on pourra regarder ζ comme la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et, comme l'excentricité est fort petite, on pourra trouver la correction dont il s'agit, c'est-à-dire la différence de ζ à z, par la relation

$$\zeta=z-\frac{e^2}{2}\sin 2z,$$

et cette approximation aura toute l'exactitude désirable (1).

Revenons maintenant à l'équation générale du problème

$$dx^2+dy^2=n^2(du^2+dt^2);$$

la question se réduit à déterminer au moyen de cette équation les valeurs de x et de y en fonction de t et u.

Posons

$$u+t\sqrt{-1}=\alpha,\qquad u-t\sqrt{-1}=\beta,$$
$$x+y\sqrt{-1}=\alpha',\qquad x-y\sqrt{-1}=\beta'.$$

Nous pouvons écrire, en appelant ν ce que devient n quand on y remplace u et t par leurs valeurs en α et β,

(1) La différence $\zeta-z$, que nous avons appelée i au § 3 du chap. I, est égale à la différence entre la latitude géographique l et la latitude géocentrique l'; elle est donnée dans la table III pour toutes les valeurs de z de degré en degré.

$$d\alpha' d\beta' = \nu d\alpha d\beta.$$

Il est alors très-facile d'obtenir α' et β'.

Remplaçons

$$d\alpha' \quad \text{par} \quad \frac{d\alpha'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta} d\beta,$$

et

$$d\beta' \quad \text{par} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta} d\beta;$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha' d\beta'}{d\alpha d\beta} + \frac{d\alpha' d\beta'}{d\beta d\alpha}\right) d\alpha d\beta = n^2 \nu d\alpha d\beta;$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha), \quad \beta' = F_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Nous serions arrivés au même résultat en exprimant que l'angle de deux éléments quelconques de la carte est égal à l'angle des deux éléments correspondants du sphéroïde.

En effet, le cosinus de l'angle compris entre les deux éléments am_1, am_2 de la carte qui partent du point (xy) et se terminent respectivement aux points $(x + dx, y + dy)$, $(x + \delta x, y + \delta y)$ sera, abstraction faite du signe,

$$\frac{dx\delta y - \delta x dy}{\sqrt{(dx^2 + dx^2)(\delta x^2 + \delta y^2)}}.$$

De même le cosinus de l'angle formé sur le sphéroïde par les deux éléments AM_1, AM_2 qui partent du point (u, t) et se terminent

respectivement aux points $(u+du,\ t+dt)$, $(u+\delta u,\ t+\delta t)$, sera

$$\frac{du\delta t - dt\delta u}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}}.$$

Nous aurons donc pour l'équation du problème

$$\frac{du\delta t - \delta u dt}{\sqrt{(du^2+dt^2)(\delta u^2+\delta t^2)}} = \frac{dx\delta y - dy\delta x}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(\delta x^2+\delta y^2)}},$$

ou, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\delta\alpha - d\alpha\delta\beta}{\sqrt{d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta}} = \frac{d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'}};$$

d'où

$$d\alpha' d\beta'\delta\alpha'\delta\beta'(d\beta\delta\alpha - \delta\beta d\alpha)^2 = d\alpha d\beta\delta\alpha\delta\beta(d\beta'\delta\alpha' - d\alpha'\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\delta\beta \qquad \text{et} \qquad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\delta\beta,$$

et, supposant les éléments AM_1, am_1 fixes, faisons varier les éléments AM_2, am_2, c'est-à-dire supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$; l'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier nombre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second; ainsi les termes en $\delta\alpha^4$ et $\delta\beta^4$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

La similitude des éléments autour de chaque point entraîne donc la conservation des angles, et réciproquement; c'est ce que nous avions déjà fait remarquer sans calcul.

Revenons aux résultats que nous avons trouvés

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{avec} \quad \beta' = F_1(\beta) \quad \text{ou bien} \quad \alpha'\Phi = (\beta) \quad \text{avec} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

Substituons à α, β, α', β' leurs valeurs en x, y, u et t; les deux solutions de notre problème deviendront

$$x+y\sqrt{-1} = F\left(u+t\sqrt{-1}\right) \quad \text{avec} \quad x-y\sqrt{-1} = F_1\left(u-t\sqrt{-1}\right),$$

et

$$x+y\sqrt{-1} = \Phi\left(u+t\sqrt{-1}\right) \quad \text{avec} \quad x-y\sqrt{-1} = \Phi_1\left(u+t\sqrt{-1}\right).$$

Les caractéristiques F et Φ désignent deux fonctions indéterminées quelconques, de sorte que $F(u+t\sqrt{-1})$ et $\Phi(u-t\sqrt{-1})$ sont des fonctions quelconques de $u+t\sqrt{-1}$ et de $u-t\sqrt{-1}$.

Mais x et y devant être réels comme u et t, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées; il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction; et, si F est imaginaire, que F_1 soit la fonction conjuguée obtenue en changeant dans la première $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il en est de même de Φ_1 relativement à Φ; ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire qui peut être imaginaire aussi bien que réelle.

M. Bonnet (1) a montré très-simplement que la première solution correspond à la similitude directe lorsque l'on se place dans la région extérieure au sphéroïde, c'est-à-dire au cas où l'on veut représenter les différents lieux de la terre comme ils sont placés en réalité sur le globe; la seconde solution, au contraire, correspond à la similitude inverse; c'est le contraire qui aurait lieu si l'on se plaçait dans la région intérieure. Comme le premier cas est seul intéressant, nous ne considérerons que la première solution

$$x+y\sqrt{-1}=F(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=F_1(u-t\sqrt{-1}).$$

Nous en tirons

$$x=\frac{1}{2}\left[F(u+t\sqrt{-1})+F_1(u-t\sqrt{-1})\right]$$
$$y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[F(u+t\sqrt{-1})-F_1(u-t\sqrt{-1})\right].$$

Telles sont les expressions les plus générales des coordonnées x et y qui déterminent sur la carte la position que doit avoir chaque lieu de la terre en vertu de la condition supposée : que la distance de deux lieux quelconques infiniment voisins sur la surface de la terre soit à la distance des mêmes lieux sur la carte dans le rapport de 1 à m.

Il est facile de voir que réciproquement les expressions dont il s'agit renferment nécessairement la loi de la description de toutes

(1) *Thèses de mécanique et d'astronomie présentées à la Faculté des sciences de Paris, le* 2 *août* 1852, par M. Ossian Bonnet, in-4, pages 39 à 78.

les cartes géographiques dans lesquelles la même condition pourra avoir lieu.

2. Cherchons l'expression du rapport d'agrandissement m en chaque point.

Nous avons posé $m = \frac{n}{r}$ et les conditions du problème ont donné

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2);$$

donc, en appelant F' et F'_1 les dérivées des fonctions F et F_1 par rapport à $u + t\sqrt{-1}$ et à $u - t\sqrt{-1}$, on aura

$$dx + dy\sqrt{-1} = F'\left(u + t\sqrt{-1}\right) \times \left(du + dt\sqrt{-1}\right),$$
$$dx - dy\sqrt{-1} = F'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) \times \left(du - dt\sqrt{-1}\right);$$

donc

$$dx^2 + dy^2 = F'\left(u + t\sqrt{-1}\right) F'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) \times (du^2 + dt^2);$$

ainsi

$$n^2 = F'\left(u + t\sqrt{-1}\right) F'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right),$$

et par conséquent

$$m = \frac{\sqrt{F'\left(u + t\sqrt{-1}\right) F'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right)}}{r} = \frac{\sqrt{(1 - e^2\cos^2 z) F'.F'_1}}{\sin z} = \frac{1}{r\Omega},$$

en posant

$$\sqrt{F'\left(u + t\sqrt{-1}\right) F'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right)} = \frac{1}{\Omega}.$$

Si nous considérons autour de deux points correspondants de la terre et de la carte deux figures infiniment petites, les côtés homologues étant dans le rapport de 1 à m, les figures seront semblables et leurs surfaces seront dans le rapport de 1 à m^2; ainsi chaque portion infiniment petite de la surface de la terre conserve sa figure et n'est altérée que dans sa grandeur.

Nous savons déjà que la supposition de m constant est inadmissible dans l'hypothèse de la terre sphéroïde, c'est-à-dire qu'il est impossible d'obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie de la terre soit partout semblable à la partie correspondante de la carte. L'analyse démontre qu'en supposant seulement que la terre soit une surface de révolution, le rapport d'agrandissement ne pourrait être constant que si cette surface était un cylindre ou un cône. Nous ne nous arrêterons pas à ce calcul.

3. Reprenons maintenant les relations

$$x+y\sqrt{-1}=\mathrm{F}(u+t\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad x-y\sqrt{-1}=\mathrm{F}_1(u-t\sqrt{-1})$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe, et cherchons à déterminer la fonction inconnue F.

Je remarque que si nous supposons $t=0$, nous aurons les valeurs des coordonnées de la courbe qui représente le premier méridien :

$$x=\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}, \qquad y=\frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}};$$

ces valeurs contenant deux fonctions arbitraires, savoir la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, peuvent être des fonctions quelconques de u ; il en résulte que le premier méridien de la carte peut être représenté par une courbe quelconque et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que pour ce méridien on ait

$$x=\varphi(u), \quad y=\psi(u),$$

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ représentant des fonctions quelconques données de u; on aura

$$\frac{\mathrm{F}(u)+\mathrm{F}_1(u)}{2}=\varphi(u) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{F}(u)-\mathrm{F}_1(u)}{2\sqrt{-1}}=\psi(u);$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{F}(u)=\varphi(u)+\psi(u)\sqrt{-1}; \quad \mathrm{F}_1(u)=\varphi(u)-\psi(u)\sqrt{-1};$$

donc, mettant cette forme de fonction dans les expressions générales de x et y, on aura

$$x=\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})+\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})-\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$
$$y=\frac{\psi(u+t\sqrt{-1})+\psi(u-t\sqrt{-1})}{2}+\frac{\varphi(u+t\sqrt{-1})-\varphi(u-t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1},$$

et ces expressions ont l'avantage que les imaginaires s'y détruisent toujours d'elles-mêmes.

Supposons, par exemple, que nous représentions le premier méridien par une droite sur laquelle la latitude devra varier, de telle sorte que $x=\mathrm{K}u$, K étant une constante; prenons cette droite pour

axe des x; les deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, sont dans ce cas 0 et u; nous aurons donc, en supposant la terre sphérique,

$$y = \mathrm{K}t \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{K}\log\operatorname{tang}\frac{90^\circ - l}{2},$$

ce qui est la loi de la projection des cartes marines; les méridiens sont des droites parallèles également espacées, et les parallèles des droites perpendiculaires aux premières et dont l'espacement est soumis à la loi

$$dx = d\left(\mathrm{K}\log\operatorname{tang}\frac{90^\circ - l}{2}\right) = \frac{-\mathrm{K}dl}{\sin(90^\circ - l)} = \frac{-\mathrm{K}dl}{\sec l}.$$

Ces cartes (1) sont employées pour la navigation parce que les rumbs de vent y sont conservés et que, par conséquent, la route à suivre pour se rendre d'un point à un autre à l'aide de la boussole en coupant tous les méridiens sous le même angle y est représentée par une droite.

En appliquant la formule $m = \frac{\sqrt{\mathrm{F}.\,\mathrm{F}_1}}{r}$, on trouve facilement que, dans l'hypothèse de la terre sphérique,

$$m = \frac{\mathrm{K}}{\cos l}.$$

Le rapport d'agrandissement des surfaces sera par conséquent

$$m^2 = \frac{\mathrm{K}^2}{\cos^2 l},$$

rapport considérable, mais qui importe peu pour les besoins de la navigation.

4. D'autres considérations peuvent nous faire déterminer immédiatement différents genres de représentation.

Quand on choisit pour F une fonction linéaire, c'est-à-dire $\mathrm{F(A)} = \mathrm{KA}$, on obtient la projection de Mercator ou des cartes marines, dont nous venons de parler.

On peut prendre pour F une fonction exponentielle réelle, par exemple l'une des plus simples

$$\mathrm{F}\left(u + t\sqrt{-1}\right) = \mathrm{K}e^{\lambda\left(u + t\sqrt{-1}\right)};$$

(1) *Voir* la deuxième partie, chap. V, pour la théorie et la construction de cette projection, et le § 22 du chapitre VI (1re partie) pour l'historique de son invention due à Gérard MERCATOR.

on a alors

$$F_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) = Ke^{\lambda(u - t\sqrt{-1})}.$$

On peut écrire

$$F\left(u + t\sqrt{-1}\right) = Ke^{\lambda u}\left(\cos\lambda t + \sqrt{-1}\sin\lambda t\right),$$

$$F_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) = Ke^{\lambda u}\left(\cos\lambda t - \sqrt{-1}\sin\lambda t\right).$$

On aura donc

$$x = Ke^{\lambda u}\cos\lambda t, \qquad \text{et} \qquad y = Ke^{\lambda u}\sin\lambda t.$$

Dans le cas de la terre sphérique $u = \log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$, z étant le complément de la latitude, donc

$$e^{\lambda u} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

et par conséquent

$$x = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\cos\lambda t \qquad \text{et} \qquad y = K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sin\lambda t. \quad \text{(A)}$$

Comme $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\lambda t$ et que $x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2\lambda} = \rho^2$, on voit que les projections de tous les points pour lesquels la latitude est constante forment un cercle, et que les projections de tous les points pour lesquels la longitude est constante forment une droite ; de plus tous les cercles représentant les parallèles ont un centre commun autour duquel rayonnent tous les méridiens.

Le rapport d'agrandissement est ici

$$m = \frac{\sqrt{F.F_1'}}{\sin z} = \frac{\lambda K\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{\sin z}.$$

Comme λ est une constante arbitraire, nous pouvons lui donner telle valeur que nous voulons. Si nous faisons d'abord $\lambda = 1$ nous obtenons la projection dite stéréographique polaire (1)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = K^2\left(\operatorname{tang}\frac{90^\circ - l}{2}\right)^2,$$

K représente alors le rayon de l'équateur.

(1) *Voir* 2e partie, chap. I, § 5.

Le rapport d'agrandissement devient

$$m = \frac{\tang \frac{z}{2}}{\sin z} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Si nous faisons, dans les équations (A), $\lambda = 0$, nous obtenons encore les cartes marines comme il est facile de s'en convaincre en développant

$$\rho = \tang\left(\frac{90^\circ - l}{2}\right)^\lambda = \left(\frac{\tang 45^\circ - \tang \frac{l}{2}}{\tang 45^\circ + \tang \frac{l}{2}}\right)^\lambda = \frac{\left(1 - \tang \frac{l}{2}\right)^\lambda}{\left(1 + \tang \frac{l}{2}\right)^\lambda}$$

suivant les puissances de $\tang \frac{l}{2}$.

Revenons aux expressions générales :

$$x = K\left(\tang \frac{z}{2}\right)^\lambda \cos \lambda t, \quad y = K\left(\tang \frac{z}{2}\right)^\lambda \sin \lambda t,$$

$$m = \frac{\lambda K \left(\tang \frac{z}{2}\right)^\lambda}{\sin z}.$$

Elles peuvent se mettre sous la forme

$$x = \rho \cos \lambda t, \quad y = \rho \sin \lambda t \quad \text{et} \quad m = \frac{\lambda \rho}{\sin z}.$$

Nous voyons que les coordonnées d'un point quelconque dont la longitude est t sont les mêmes que celles qui correspondent à λ fois la longitude t dans la projection stéréographique polaire définie par l'hypothèse $\lambda = 1$. Si donc λ est une fraction moindre que l'unité, la projection de la sphère entière, au lieu d'occuper la totalité d'un cercle, sera comprise dans un secteur qui sera la même fraction de l'aire totale. Ainsi, si $\lambda = \frac{1}{2}$, la projection de la sphère entière sera comprise dans un demi-cercle; si $\lambda = \frac{1}{3}$, dans un secteur de 120°; si $\lambda = \frac{2}{3}$, dans un secteur de 240°.

Nous reviendrons (1) sur cette projection imaginée par *Lambert* et plus connue sous le nom de *projection de Gauss.*

(1) *Voir* chap. II, § 8, et 2e partie, chap. XI.

Si nous posons $K = 1$, c'est-à-dire si nous prenons pour unité le rayon de l'équateur de la projection, nous avons

$$\rho = \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

formule qui permet de calculer facilement le rayon ρ de chaque parallèle pour chaque valeur de z de 0 à 180°. Les valeurs de ρ pour $z = 10°$, 20°, 30°..... dans les quatre cas $\lambda = \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ont été réunies dans le tableau du chap. XI (2ᵉ partie) et ont servi à tracer les projections nᵒˢ VI et VII.

5. La manière dont nous avons déterminé les fonctions arbitraires qui entrent dans les valeurs de x et de y, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. Il vaut mieux, en effet, profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F_1 et F, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

Proposons-nous de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupe une position déterminée sur la carte. Nous pouvons supposer dans ce cas F réel, et alors F_1 étant égale à F, on n'a plus qu'une seule fonction à déterminer. Cette fonction devant avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de t et par conséquent de $u + t\sqrt{-1}$, pourra toujours être déterminée au moyen des formules d'interpolation.

On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement m à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe ; à l'aide des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires.

Enfin on peut se donner la figure même des parallèles et des méridiens, et alors la question se réduit à déterminer la forme des fonctions inconnues de la solution générale, de sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des lignes d'une nature donnée. Ce problème, pris dans toute sa généralité, est peut-être impossible à résoudre ; mais comme il paraît naturel, quand on se donne d'avance la forme des méridiens et des parallèles, de prendre les formes les plus simples, nous ne considérerons que le cas où ces courbes doivent être des cercles, les droites pouvant être considérées comme des cercles de rayon infini. Cette question, étudiée avec beau-

coup de détails par *Lagrange* (1), a été reprise plus tard par M. Bonnet (2), qui l'a traitée avec l'élégance et la clarté qui caractérisent tous ses travaux.

6. Comme la principale propriété du cercle consiste en ce que le rayon de courbure est constant, nous allons d'abord chercher l'expression des rayons osculateurs ρ des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles par les formules générales que nous avons trouvées.

L'expression du rayon osculateur d'une courbe plane quelconque rapportée aux coordonnées rectangulaires x et y est

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy d^2x - dx d^2y}.$$

Occupons-nous d'abord des méridiens ; nous devons supposer t constant dans la formule générale

$$x + y\sqrt{-1} = \mathrm{F}(u + t\sqrt{-1});$$

nous en déduirons

$$dx = \alpha du \quad \text{et} \quad dy = \beta du,$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle, et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à u, de $\mathrm{F}\ (u + t\sqrt{-1})$; il en résulte

$$d^2x = \frac{d\alpha}{du} du^2 \quad \text{et} \quad d^2y = \frac{d\beta}{du} du^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de ρ,

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta \frac{d\alpha}{du} - \alpha \frac{d\beta}{du}}.$$

Or, pour un point quelconque de la surface, on a

$$dx = \alpha du - \beta dt \quad \text{et} \quad dy = \beta du + \alpha dt;$$

(1) *Sur la construction des cartes géographiques* (deux mémoires consécutifs) dans les *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, année* M.DCC.LXXIV, Berlin 1781, in-4°, pages 161 à 210.

(2) *Thèse d'astronomie*, par M. Ossian Bonnet, 1852.

donc on a aussi les relations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\beta}{du} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{du}.$$

Il en résulte

$$\rho_m = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta\frac{d\beta}{dt}+\alpha\frac{d\alpha}{dt}},$$

ou enfin

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Pour les parallèles, en considérant u comme constant, on trouvera de même

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

D'après la définition de α et de β et la forme des fonctions F et F_1, il est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})F_1'(u-t\sqrt{-1})},$$

quantité que nous avons appelée $\frac{1}{\Omega}$ dans l'expression du rapport d'agrandissement $m = \frac{1}{r\Omega}$.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_p} = \frac{d\Omega}{du}.$$

Revenons maintenant à la question que nous nous sommes proposée, de représenter les méridiens et les parallèles par des cercles. La première condition exige que la courbure $\frac{1}{\rho_m}$ des méridiens ne varie pas quand u varie, et soit par conséquent fonction de t seulement ; donc

$$\frac{d^2\Omega}{dt\,du} = 0.$$

Il en résulte cette conséquence importante que, par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le

sont aussi, car la condition $\frac{d^2\Omega}{dt\,du}=0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{du}$ des parallèles est fonction de u seulement, puisque sa dérivée par rapport à t est nulle; par conséquent cette courbure est constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que, si les parallèles sont représentés par des cercles, les méridiens le sont également; et la condition commune à la circularité des uns et des autres est $\frac{d^2\Omega}{du\,dt}=0$.

Voyons maintenant quelle doit être la forme des fonctions arbitraires F et F_1 pour que cette condition soit remplie.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F(z)}}=\varphi(z),\quad \frac{1}{\sqrt{F_1(z)}}=\psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega=\varphi(u+t\sqrt{-1})\,\psi(u-t\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{du\,dt}=0$$

deviendra

$$\varphi''(u+t\sqrt{-1})\,\psi(u-t\sqrt{-1})-\psi''(u-t\sqrt{-1})\,\varphi(u+t\sqrt{-1})=0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(u+t\sqrt{-1})}{\varphi(u+t\sqrt{-1})}=\frac{\psi''(u-t\sqrt{-1})}{\psi(u-t\sqrt{-1})};$$

or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante k; on a donc

$$\frac{\varphi''(u+t\sqrt{-1})}{\varphi(u+t\sqrt{-1})}=k,$$

d'où

$$\varphi(u+t\sqrt{-1})=\mathrm{A}e^{\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}+\mathrm{B}e^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})},$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires; et par conséquent,

$$F(u+t\sqrt{-1})=P+\frac{e^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}+Ne^{-\sqrt{k}(u+t\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des constantes de même nature que A et B. Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k=c^2$, en changeant seulement u en t et t en $-u$. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2; il viendra ainsi

$$F(u+t\sqrt{-1}),$$

ou bien

$$\text{(I)}\qquad x+y\sqrt{-1}=P+\frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{Me^{c(u+t\sqrt{-1})}+Ne^{-c(u+t\sqrt{-1})}}.$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x et y, c'est-à-dire à transporter les axes des x et des y parallèlement à eux-mêmes. De plus les constantes que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $M=me^{\alpha\sqrt{-1}}$, $N=ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{e^{-c(u+t\sqrt{-1})}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}+ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x\cos\beta-y\sin\beta=x_1,\qquad x\sin\beta+y\cos\beta=y_1;$$

nous aurons

$$x_1+y_1\sqrt{-1}=\frac{e^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[u+\left(t+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}+ne^{-c\left[u+\left(t-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or x_1 et y_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x

et y dans un système d'axes rectangulaires (OX_1, OY_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes OX, OY); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (I), après qu'on y a fait $P=0$, $M=m$, $N=n$, qu'en ce que $t+\frac{\alpha-\beta}{c}$ est mis à la place de t, comme on le voit aisément en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X_1, Y_1) pour axes des (X, Y), et si l'on recule le méridien initial, à partir duquel se comptent les longitudes t, de l'angle $\frac{\alpha-\beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (I). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

Pour déduire de l'équation (I) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x et y en u et t, multiplions, dans le second membre haut et bas par $Me^{c(u-t\sqrt{-1})}+Ne^{-c(u-t\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{Me^{-2ct\sqrt{-1}}+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2uc}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x=\frac{M\cos 2ct+Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$
$$y=\frac{-M\sin 2ct}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}}.$$

Si, entre ces équations, on élimine u, on obtiendra une relation entre x, y, t qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et réciproquement, si l'on élimine t, on aura une équation en x, y, u, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différentes parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x^2+y^2=\frac{e^{-2cu}}{M^2e^{2cu}+2MN\cos 2ct+N^2e^{-2cu}},$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x}{x^2+y^2}=N+Me^{2cu}\cos 2ct,$$
$$\frac{y}{x^2+y^2}=-Me^{2cu}\sin 2ct.$$

Éliminant maintenant la variable u, on a

$$\text{(II)} \qquad x^2 + y^2 - \frac{y}{N}\operatorname{cotang} 2ct - \frac{x}{N} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX qui a $\frac{1}{N}$ pour abscisse; de plus elle coupe l'axe des x au point O sous un angle égal à $\pi - 2ct$ ou à $-2ct$ suivant que $t = \theta$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du côté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

Éliminons, en second lieu, la variable t; on trouve

$$\text{(III)} \qquad x^2 + y^2 + \frac{2Nx}{M^2 e^{4cu} - N^2} - \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soit dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2[(x - a')^2 + y^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2N}{M^2 e^{4cu} - N^2}, \qquad \frac{k^2 a'^2 - a^2}{1 - k^2} = \frac{1}{M^2 e^{4cu} - N^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{M}{N} e^{2cu};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus comme intersections des méridiens et de l'axe des x, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N} e^{2cu}$.

Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (II) et (III) ; on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

(IV) $$x^2 + y^2 - 2a \operatorname{cotang} 2ct \,.\, y = a^2,$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x^2 + y^2 + 2a\frac{4a^2M^2e^{4cu}+1}{4a^2M^2e^{4cu}-1}\,x = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante ; faisant $4a^2M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x deviendra

$$2a\frac{e^{4cu+4ch}+1}{e^{4cu+4ch}-1} = 2a\frac{e^{2c(u+h)}+e^{-2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)}-e^{-2c(u+h)}}$$
$$= -2a\sqrt{-1}\operatorname{cotang} 2c\frac{u+h}{\sqrt{-1}},$$

et l'équation sera

(V) $$x^2 + y^2 - 2a\sqrt{-1}\operatorname{cotang} 2cu_1 x = -a^2,$$

en posant

$$u + h = u_1\sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de u_1, n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (V). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

Il est utile de connaître les valeurs de x et de y, en fonction de u_1 et de t. Or reprenons les valeurs

$$x = \frac{M\cos 2ct + Ne^{-2cu}}{M^2e^{2cu} + 2MN\cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$
$$y = \frac{-M\sin 2ct}{M^2e^{2cu} + 2MN\cos 2ct + N^2e^{-2cu}},$$

obtenues précédemment. Changeons dans la première x en $x + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut ; ce qui donne

$$x = \frac{N^2e^{-2cu} - M^2e^{2cu}}{2N(M^2e^{2cu} + 2MN\cos 2ct + N^2e^{-2cu})},$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x = a\frac{e^{-2c(u+h)} - e^{2c(u+h)}}{e^{2c(u+h)} + 2\cos 2ct + e^{-2c(u+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

$$y = -a\frac{\sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct},$$

De là on tire encore

$$x + y\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cu_1 + \sin 2ct}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$

par conséquent

$$\mathrm{F}\left(u + t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 + t),$$
$$\mathrm{F}_1\left(u - t\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(u_1 - t);$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{F}'\left(u + t\sqrt{-1}\right)\mathrm{F}'_1\left(u - t\sqrt{-1}\right)}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)}{ac}.$$

On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x, y) aux points A et O situés sur l'axe des x, et à la distance a de l'origine; nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2ax + a^2, \qquad r'^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (V),

$$r^2 = 2ax\left(1 + \sqrt{-1}\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$
$$r'^2 = 2ax\left(-1 + \sqrt{-1}\operatorname{cotang} 2cu_1\right),$$

et, en substituant à x sa valeur en u_1 et t,

$$r^2 = 2a^2\frac{\cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct}, \qquad r'^2 = 2a^2\frac{\cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\sin 2cu_1}{\cos 2cu_1 + \cos 2ct};$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(u_1 + t)\cos c(u_1 - t)},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{crr'}.$$

On devra, dans les résultats que nous venons d'obtenir, remplacer u par sa valeur en fonction de la latitude, valeur que nous avons trouvée précédemment (§ 1).

$$u = \log K \operatorname{tang} \frac{\zeta}{2},$$

ζ désignant la distance polaire corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre.

Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c qui est en quelque sorte l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A' où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A ; on connaît ainsi le méridien AA' correspondant à $t = 0$, et le parallèle BB', perpendiculaire au milieu de AA', correspondant à $u_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien à partir duquel se comptent les longitudes et celle de la constante h ; car puisque pour le centre de la carte on a $t = 0$, $u_1 = 0$, d'après la valeur de t, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte ; et d'après la valeur de u_1, si l'on appelle z_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}$ la valeur de u pour ce même point, on a

$$h + \log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log \operatorname{tang} \frac{z_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude t, on décrit, avec AA' pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2ct$, au-dessous de AA' si t est positif, ou bien un segment capable de $\pi + 2ct$ au-dessous de AA' si t est négatif ; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - z$, et par conséquent à la valeur $\log \operatorname{tang} \frac{z}{2}$ de u, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A' est égal à

$$\frac{M}{N} e^{2cu} = e^{2c(u+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang} \frac{z_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

La valeur de c étant arbitraire, on voit que, en faisant $c = 0$, on retrouve la projection de Mercator; en prenant $c = \frac{1}{2}$, on obtient la projection stéréographique méridienne où la moitié seulement du globe est représentée sur le cercle d'un rayon égal à $\frac{AA'}{2}$. En prenant $c = \frac{1}{4}$, on peut représenter toute la surface du globe parce qu'alors les méridiens se coupent aux pôles sous des angles qui sont la moitié des angles de la sphère, mais les autres angles sont conservés. Quand nous reviendrons sur la construction de cette projection, nous donnerons les tables qui conviennent à ce cas particulier. Le canevas n° V, qui représente l'hémisphère nord, a été dressé dans ce système.

Si l'on veut, dans la projection générale qui nous occupe, tenir compte de l'aplatissement de la terre, il suffira de remplacer partout les angles z par les distances aux pôles ζ corrigées en vertu de l'aplatissement et calculées dans la table III pour l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{299,15}$.

7. On voit que dans la construction de ces cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance AA' ou $2a$ dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre que l'on prend pour centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par m, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel m est le moins altéré.

M. Bonnet a montré, dans ses travaux sur la théorie générale des surfaces, que si l'on appelle A une courbe tracée sur une surface de révolution, A' la courbe correspondante tracée sur la représentation plane de cette surface, $\delta\sigma$ le déplacement infiniment petit normal à la courbe A, la relation générale qui lie les courbures géodésiques des deux courbes conjuguées A et A' est

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{m}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\delta \frac{1}{m}}{\delta\sigma},$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe A′, et $\frac{\cos\theta}{\rho}$ la courbure géodésique de la courbe A.

Cette formule nous permet de résoudre très-simplement la question du minimum de m. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA′ de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\delta \frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0, \qquad \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

et par conséquent $\frac{1}{\rho'}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu, que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{\cos z}{u}, \qquad \frac{1}{m} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\delta \frac{1}{m}}{\delta\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega \cos z;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2cu_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c(u_1 + t)\cos(u_1 - t)}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 cu_1}{ac} = \frac{1 + \cos 2cu_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition trouvée, $t = 0$. Donc notre formule devient

$$\text{(VI)} \qquad \frac{2c\sqrt{-1}\sin 2cu_1}{1+\cos 2cu_1} = -\cos z.$$

Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport des distances du point cherché aux points A et A'; on sait que

$$k = e^{2c(u+h)} = \cos 2cu_1 + \sqrt{-1}\sin 2cu_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2cu_1 - \sqrt{-1}\sin 2cu_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\sin 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\cos 2cu_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (VI), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos z,$$

d'où

$$k = \frac{2c - \cos z}{2c + \cos z}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA' qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos z$ et à $2c + \cos z$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître z, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA' de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{m}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\,\frac{1}{\rho'}}{du} = \frac{1}{m}\,\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_1}{du},$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_1$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{du} = -\frac{2c}{a}\cos 2cu_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_z}{du} = \frac{d\operatorname{cotang} z}{du} = -\frac{1}{\sin z}, \qquad \frac{1}{m} = \sin z\,\frac{1+\cos 2cu_1}{2ac};$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2cu_1 = 1 + \cos 2cu_1;$$

d'où

$$4c^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2+1}$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1+\sin^2 z},$$

ce qui détermine $2c$ quand la latitude $l = 90° - z$ est connue.

Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1+\sin^2 z_1}$, z_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A' de façon que le rapport des distances de ces points au point M' qui représente le point M de la terre soit $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$; enfin le coefficient h qui, en appelant z_0 le complément de la latitude du centre de la carte est égal à $-\log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M'A et M'A' ou $\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}$ doit être $\frac{\left(\operatorname{tang}\frac{z_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

La projection dont nous venons de donner les formules et le tracé est connue sous le nom de *projection de Lagrange*.

8. Nous avons traité avec détail, dans ce qui précède, le cas particulier où les méridiens sont des cercles qui se coupent aux pôles, cercles qui peuvent devenir des droites; nous avons vu que les parallèles devaient être aussi représentés par des cercles, et nous avons donné les formules qui permettent de déterminer ces courbes, soit par leur centre, soit par leur intersection avec des droites fixes de la carte, soit enfin par points isolés.

Le géomètre *Lambert* (1) est arrivé directement aux mêmes résultats par un calcul des plus simples que nous allons exposer ici.

Cherchons d'abord à remplir la condition que :

Dans un réseau où les parallèles sont représentés par des cercles concentriques et les méridiens par les rayons de ces cercles, le trapèze curviligne infiniment petit formé par deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins soit semblable au petit quadrilatère correspondant de la sphère.

Soient (fig. 11) P le pôle, PN et Pn deux droites représentant deux méridiens infiniment voisins dont la différence des longitudes est dt; mM, nN deux arcs de cercle décrits du pôle P et représentant deux parallèles dont la différence des latitudes est $dz = -dl$, en appelant z le complément de la latitude du parallèle Mm.

Pour que le trapèze MmnN soit semblable à la figure correspondante de la sphère, il faut évidemment que l'angle NPn soit égal à λdt, λ étant une constante arbitraire, et que le rapport de chaque degré de parallèle à chaque degré de méridien soit le même que sur la sphère.

Appelons ρ le rayon PM qui représente l'arc de grand cercle z; MN sera alors $d\rho$, et l'on devra avoir, en supposant la terre sphérique,

$$\frac{d\rho}{\lambda\rho dt} = \frac{dz}{\sin z dt}$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = \lambda \frac{dz}{\sin z}.$$

En intégrant

$$\log \rho = \lambda \log \operatorname{tang} \frac{z}{2} + C.$$

(1) *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, durch J. H.* LAMBERT, Berlin, 1772, in-8, pages 105-199 (*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und-Himmelscharten.*

Cette constante C peut être déterminée en se donnant, par exemple, la valeur de z pour laquelle le rayon ρ est égal à l'arc correspondant du méridien de la sphère; supposons que pour $z = 90°$, k c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur sur la carte, doive être égale au quart du méridien, $\frac{1}{2} a\pi$, en appelant a le rayon de la terre; on aura alors

$$C = \log \tfrac{1}{2} a\pi = \log k;$$

et la formule générale devient

$$\log \rho = \log \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda} + \log k = \log k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

donc

$$\rho = k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}.$$

Nous avons ainsi obtenu directement, comme l'a fait *Lambert*, la projection dont nous avons déjà parlé au § 4, et que *Gauss* (1) a traitée comme application de sa formule générale des projections assujetties à la condition de conserver la similitude des configurations dans la représentation d'une surface sur une autre.

On trouverait facilement que le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k \left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z} = \frac{\lambda \rho}{a \sin z}.$$

Dans le cas où l'on veut tenir compte de la forme elliptique de la terre, il faut poser

$$\frac{d\rho}{\lambda \rho dt} = \frac{(1 - e^2) dz}{\sin z (1 - e^2 \cos^2 z) dt},$$

en appelant z l'angle de la normale avec l'axe des pôles. En intégrant, on aura donc

(1) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzugebilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von* C. F. GAUSS; un cahier de 30 pages compris dans les *Astronomische Abhandlungen herausgegeben von* H. C. SCHUMACHER; *drittes Heft.* Altona, 1825, in-4°; voir principalement pages 14 à 17. Ce mémoire, couronné en 1822 par l'Académie des sciences de Copenhague, est donc postérieur de cinquante ans à l'ouvrage de Lambert; du reste Gauss, loin de s'attribuer le mérite de l'invention de cette projection, cite l'atlas céleste de *Harding* publié à Göttingue de 1808 à 1822, et dont les planches XIX à XXVI sont assujetties à cette projection avec les modifications que nous allons indiquer.

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \int \frac{(1-e^2)dz}{\sin z(1-e^2\cos^2 z)} = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \int\frac{e^2\sin z dz}{1-e^2\cos^2 z},$$

$$\frac{1}{\lambda}\log\rho - \log k = \log\operatorname{tang}\frac{z}{2} - \frac{e}{2}\log\frac{1-e\cos z}{1+e\cos z} = \log\left[\operatorname{tang}\frac{z}{2}\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}}\right],$$

et, en appelant, comme nous l'avons déjà fait, ζ la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre, et posant

$$\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2} = \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos z}{1-e\cos z}\right)^{\frac{e}{2}},$$

l'expression de $\frac{1}{\lambda}\log\rho$ a aussi la même forme que dans le cas de la terre sphérique, et l'on aura

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}.$$

On pourra donc faire servir au cas de la terre elliptique les tables dressées comme nous l'avons dit (§ 4), et donnant les valeurs de ρ pour les valeurs de z de 10 en 10 degrés; il suffira de calculer préalablement les valeurs de ζ qui correspondent aux valeurs de z. Ces valeurs de ζ sont réunies dans la table III calculée à l'aide de la formule que nous avons indiquée :

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z.$$

Si la constante k doit exprimer la longueur de l'arc de méridien compris entre le pôle et l'équateur, on aura

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 \ldots\right),$$

ou plus simplement, en négligeant e^4 et prenant $\alpha = \frac{1}{299{,}15}$,

$$k = Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}56818 . a.$$

Le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{\lambda k\left(\operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}}{a\sin\zeta}.$$

9. Comme λ est arbitraire on peut le prendre de façon à satisfaire à une nouvelle condition; on peut, par exemple, déterminer λ de telle sorte que les degrés de deux parallèles donnés sur le réseau, aient entre eux le même rapport que sur la sphère. Appelons z_0 et z_1 les colatitudes de ces parallèles; leurs degrés étant dans le rapport de $\sin z_0$ à $\sin z_1$, les rayons des cercles correspondants devront être dans le même rapport, et l'on aura :

$$\left(\frac{\tang \frac{z_1}{2}}{\tang \frac{z_0}{2}}\right)^\lambda = \frac{\sin z_1}{\sin z_0},$$

d'où

$$\lambda = \frac{\log \sin z_1 - \log \sin z_0}{\log \tang \frac{z_1}{2} - \log \tang \frac{z_0}{2}}.$$

z_0 et z_1 peuvent être les valeurs extrêmes de z; ainsi, pour l'Europe, en prenant pour parallèles extrêmes ceux de 70° et de 80° de latitude nord, $z_0 = 20°$ et $z_1 = 60°$. On trouve alors $\lambda = 0{,}78327$; les angles au pôle (les seuls qui ne soient pas conservés) sont les $\frac{4}{5}$ environ des angles véritables; 10° de longitude sont représentés par un angle de 7° 49′ 57″,7, soit 7° 50′ environ.

Si l'on voulait représenter de cette manière, et avec la même valeur de λ, un hémisphère entier, l'angle au pôle serait de 281° 59′ 38″.

Si l'on prend le rayon de la terre pour unité, le rayon de l'équateur de la carte sera 1,571... Les plus petits degrés de latitude sont entre les parallèles de 40° et de 50° de latitude, les plus grands entre le pôle et 80° de latitude. Vers l'équateur les degrés de latitude augmentent; les plus petits ont avec les plus grands le rapport approché de 15 à 25, ou de 3 à 5. Comme les différences sont à peu près constantes, les distances peuvent se mesurer approximativement avec la même échelle, si d'ailleurs les lieux ne sont pas très-éloignés les uns des autres en longitude.

Rappelons enfin que, lorsque les rayons des parallèles sont trop grands pour que les cercles puissent être décrits facilement avec le compas, on peut les tracer par points à l'aide des coordonnées

$$x = \rho \cos \lambda t, \qquad y = \rho \sin \lambda t,$$

rapportées à deux axes rectangulaires passant par le pôle, centre de tous les parallèles.

La projection VI a été construite avec la valeur de $\lambda = \frac{3}{4}$ qui résulte, comme nous l'avons indiqué, de la condition de conserver le rapport des degrés de longitude des parallèles de 30° et de 70° de latitude (1); la projection VII suppose $\lambda = \frac{1}{3}$.

10. Revenons à la formule générale

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda};$$

on peut déterminer la valeur de λ d'après une autre condition, celle par exemple que, dans la figure $MNnm$, nN ait avec MN le même rapport que mM. Cela n'ayant pas lieu simultanément pour toutes les latitudes, donnons-nous la latitude $90° - Z$ pour laquelle nous voulons qu'existe cette propriété; cela revient évidemment à nous donner la latitude du parallèle sous lequel l'agrandissement est minimum; nous résoudrons donc le problème, soit en égalant à zéro la dérivée par rapport à z de la valeur de m, soit par la considération de la figure $MNnm$.

Or

$$Nn = \lambda dt(\rho + d\rho),$$

et l'arc correspondant de la sphère est exprimé par

$$dt\sin(z + dz) = dt(\sin z + \cos z dz);$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{dt(\sin z + \cos z dz)}{\lambda dt(\rho + d\rho)};$$

il en résulte

$$dz\lambda(\rho + d\rho) = d\rho(\sin z + \cos z dz);$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + \lambda = \left(\frac{\sin z}{dz} + \cos z\right);$$

or

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} = \frac{\sin z}{z},$$

donc

$$\frac{\sin z}{dz} + \lambda = \frac{\sin z}{dz} + \cos z;$$

(1) Dans les huit cartes d'étoiles de l'astronome Harding dont nous avons parlé dans la note précédente, on a pris pour z_0 et z_1 les colatitudes des parallèles extrêmes.

d'où enfin

$$\lambda = \cos z,$$

et, par conséquent, pour la distance polaire Z,

$$\lambda = \cos Z.$$

La formule devient alors

$$\rho = k\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{Z},$$

par laquelle le trapèze MmNn est tout à fait semblable au trapèze qu'il représente.

Il conviendra de prendre pour Z la colatitude du parallèle moyen de la carte à construire ; ainsi 40° pour la carte de l'Europe. Si nous prenons pour parallèle moyen celui de 51° 34′, Z = 38° 26′, nous trouvons $\lambda = 0{,}78327$, et si nous nous reportons au paragraphe précédent, nous voyons que notre canevas jouira de cet avantage que le rapport d'agrandissement sera le même sur les parallèles de 70° et de 30° et sera minimum sur celui de 51° 34′.

Si nous considérons le cas de la terre elliptique, le calcul est le suivant :

$$\frac{\lambda(\rho + d\rho)}{d\rho} = \frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{\sin(z+dz)[1 - e^2\cos^2(z+dz)]}{(1-e^2)\,dz},$$

$$\frac{\lambda\rho}{d\rho} + \lambda = \frac{(\sin z + \cos z dz)(1 - e^2\cos z + 2e^2\cos z\sin z dz)}{(1-e^2)dz}$$

$$= \frac{\sin z(1 - e^2\cos^2 z)}{(1-e^2)dz} + \frac{\cos z - e^2\cos z(1 - 3\sin^2 z)}{1-e^2};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\cos Z - e^2\cos Z(1 - 3\sin^2 Z)}{1 - e^2}.$$

Telle est la valeur que prend λ pour la colatitude Z du parallèle sur lequel le rapport d'agrandissement doit être minimum.

On serait parvenu plus simplement au même résultat en remplaçant, dans le calcul qui convient au cas de la terre sphérique, z par ζ et, l'on aurait trouvé par conséquent $\lambda = \cos\zeta$, cette valeur ζ se déduisant de la colatitude donnée Z à l'aide de la formule

$$\zeta = z - \frac{e^2}{2}\sin 2z.$$

11. Lorsqu'on veut dresser des cartes d'étoiles, il peut être avan-

tageux de déterminer λ de telle sorte que les 45 premiers degrés de méridien soient égaux aux suivants, c'est-à-dire que le 45° degré de latitude partage tous les méridiens (du pôle à l'équateur) en deux parties égales.

On aura alors, pour $z = 45°$,

$$\frac{1}{4}a\pi = \frac{1}{2}a\pi\left(\text{tang}\,\frac{45°}{2}\right)^{\lambda},$$

ou bien

$$\frac{1}{2} = \left(\text{tang}\,22°\,\frac{1}{2}\right)^{\lambda};$$

d'où

$$\lambda = \frac{0,30103}{0,38277} = 0,78643,$$

valeur qui approche beaucoup de 0,78327, ce qui montre un nouvel avantage du réseau pour lequel λ est à peu près égal à 0,78327.

Les cartes tracées d'après cette méthode peuvent être prolongées aussi loin que l'on veut au delà de l'équateur.

Pour les cartes particulières, il convient de prendre, pour z_0 et z_1 (voir § 9), les colatitudes géographiques des parallèles qui divisent à peu près en trois parties égales la distance des deux parallèles extrêmes de la carte à tracer (1). Si, par exemple, un pays, tel que l'Europe, est compris entre 30° et 70° de latitude, on prendra $z_1 = 46°\,40'$ et $z_0 = 33°\,20'$ et l'on calculera λ par la formule

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\text{tang}\,\frac{z_1}{2} - \log\text{tang}\,\frac{z_0}{2}}.$$

Le rayon restera évidemment arbitraire et ne dépendra que de l'échelle de la carte, c'est-à-dire de la grandeur à donner au réseau.

---

(1) La Société de géographie de Saint-Petersbourg a choisi cette projection, en lui attribuant la dénomination de « *projection de Gauss*, » pour la belle carte de la Russie européenne en douze feuilles, qu'elle a publiée en 1862. Les deux parallèles dont les degrés conservent leur véritable rapport sont ceux de 46° et 58°, les latitudes des parallèles extrêmes étant 36° et 68°.

Sous le parallèle moyen, qui est celui de 52°, le degré subit un retrait qui le réduit à 0,994 de sa valeur réelle, tandis que sous les parallèles extrêmes il éprouve une dilatation qui le porte à 1,031 et à 1,040. Des échelles variables en *verstes* accompagnent la graduation des latitudes sur les bordures d'encadrement de chacune des douze feuilles de la carte. Le méridien moyen est celui de 10° à l'est de l'observatoire de Saint-Pétersbourg situé à 27° 59′ 31″ à l'est du méridien de Paris.

Avant de quitter ce sujet, disons que toutes les fois que λ est plus petit que l'unité, on peut plier la projection entière en forme de globe pour en faire des *coniglobes* dont l'usage était plus répandu autrefois qu'il ne l'est aujourd'hui, et la projection rentre alors dans la classe générale des projections coniques; elle peut être regardée comme le développement d'un cône ayant son sommet sur l'axe des pôles du globe, et coupant le sphéroïde suivant deux parallèles qui seront développés sur la carte en véritable grandeur, la position de ces parallèles, c'est-à-dire la connaissance de leurs colatitudes z_0 et z_1 définira la valeur du rapport λ qui est égal au sinus du demi-angle au sommet de ce cône. Nous aurons occasion, en traitant des projections coniques (1), de reparler de ce système, que nous désignerons, ainsi que la fait M. d'Avezac, sous le nom de *projection conique orthomorphe de Lambert* (2).

ÉTUDE DIRECTE DES PROJECTIONS ORTHOMORPHES A MÉRIDIENS CIRCULAIRES.

12. Nous avons traité avec détail aux §§ 8, 9, 10, 11, le cas particulier où les méridiens sont des droites passant par le centre commun à tous les parallèles; nous allons maintenant traiter, ainsi que l'a fait Lambert (3), le cas général où les méridiens sont des cercles se coupant sous des angles λ fois plus grands ou plus petits que les véritables, les parallèles d'autres cercles coupant les premiers à angles droits, de manière que le rapport des degrés de longitude et de latitude soit le même sur la carte que sur la sphère.

Soient (fig. 12) P, P' les pôles, PP' un méridien représenté par une droite et à partir duquel on compte les longitudes; CO perpendiculaire sur le milieu de PP' sera le lieu des centres de tous les méridiens; soit dt la différence des longitudes des deux méridiens infiniment voisins PCP', et PMP' dont O est le centre.

L'angle MPC doit, par hypothèse, être égal à λdt. Posons CP $= 1$; alors

$$MC = \tang(\tfrac{1}{2}\lambda dt) = \tfrac{1}{2}\lambda dt.$$

(1) *Voir* plus loin, chap. VI, § 9.

(2) Signalons, en terminant, l'etude que sir J. F. W. Herschel a faite de cette projection dans un travail inséré dans *the Journal of the royal geographical Society, volume the thirtieth, London*, 1860, pages 100-106, où l'auteur cherche les conditions sous lesquelles une sphère peut être projetée sur un plan de manière que la représentation de toute portion infiniment petite de la surface soit semblable de forme à la portion originale.

(3) *Entwerfung der Charten...* sect. V, p. 145.

De même

$$CO = \text{cotang}\,\lambda dt = \frac{1}{\lambda dt}.$$

Soit z la colatitude d'un point quelconque B du méridien PCP'.

Posons $BC = x$ et soit $Bb = -dx$. On a d'abord

$$MO = AO = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}\lambda dt,$$

$$BO = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 dt^2} + x^2} = \frac{1}{\lambda dt} + \frac{1}{2}x^2\lambda dt,$$

donc

$$AB = \tfrac{1}{2}\lambda dt(1 - x^2).$$

Pour que les degrés de latitude gardent leur rapport exact avec ceux de longitude, on devra avoir

$$\frac{AB}{Bb} = \frac{dt \sin z}{dz},$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda dt(1 - x^2)}{dx} = dt\frac{\sin z}{dz};$$

d'où

$$-\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2dx}{1 - x^2}.$$

Posons $x = \cos\varphi$; on aura

$$\frac{\lambda dz}{\sin z} = \frac{2d\varphi}{\sin\varphi},$$

et en intégrant,

$$\frac{1}{2}\lambda \log\left(C \,\text{tang}\,\frac{z}{2}\right) = \log \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi.$$

La constante C est arbitraire et permet d'assujettir le problème à une condition de plus. Déterminons-la, par exemple, par la condition que $x = 0$ et par suite $\varphi = 90°$ lorsque $z = z_0$, z_0 étant la colatitude du parallèle donné qui devra ainsi être représenté par une droite. On voit alors que

$$C = \text{cotang}\,\frac{z_0}{2},$$

et il en résulte

$$\left(\text{cotang}\,\frac{z_0}{2}\,\text{tang}\,\frac{z}{2}\right)^\lambda = \text{tang}^2\,\frac{\varphi}{2};$$

et comme

$$x = \frac{1 - \text{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \text{tang}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

on a enfin la formule

$$x = \frac{1 - \left(\text{cotang} \frac{z_0}{2} \text{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda}{1 + \left(\text{cotang} \frac{z_0}{2} \text{tang} \frac{z}{2}\right)^\lambda} = 1 - \frac{2}{\left(\text{tang} \frac{z_0}{2}\right)^\lambda \left(\text{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1.}$$

Le rayon ρ de chaque parallèle est exprimé par

$$AD = AB \,\text{cotang}\, ADB = AB \,\text{cotang}\, AOC,$$

ou

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} x.$$

On voit que

$$CD = x + \rho = \frac{1 + x^2}{2x}.$$

Pour $z = 0$, $x = +1$ et pour $z = 180°$, $x = -1$, ce qui montre que les deux pôles sont également distants du centre. Il en résulte que les degrés des deux côtés de l'équateur deviennent inégaux entre eux et que le tracé est moins régulier que lorsque $z_0 = 90°$, car alors la formule devient

$$x = 1 - \frac{2}{\left(\text{cotang} \frac{z}{2}\right)^\lambda + 1},$$

et, dans ce cas, l'équateur est représenté par une droite perpendiculaire sur le milieu de PP'.

Les formules précédentes montrent l'identité de cette projection avec celle que nous avons étudiée longuement sous le nom de *projection de Lagrange.* (Voir les §§ 6 et 7 de ce chapitre.) La constante que nous avions appelée $2c$ est la même que celle que nous représentons ici par λ et indique le rapport dans lequel sont réduits les angles des méridiens entre eux. Nous avons vu comment Lagrange a su augmenter les avantages de cette projection en profi-

tant de l'indétermination de la constante λ ; nous n'avons donc rien à ajouter à l'étude que nous en avons déjà faite (1).

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

13. Nous avons traité de la manière la plus générale, dans ce qui précède, la question de la représentation du sphéroïde sur un plan, sous la condition de la similitude des éléments infiniment petits, et nous avons donné différentes méthodes qui permettent de traiter très-simplement quelques cas particuliers.

Il est une autre méthode, aussi très-générale, qui permet d'arriver aux mêmes résultats, et, dans des cas particuliers, d'une manière assez simple : je veux parler de la méthode des coefficients indéterminés.

On sait que toute fonction y de deux variables indépendantes t et l peut être exprimée par une série continue de la forme

$$\begin{array}{llll|ll|ll|l} y = \mathrm{A} & + \mathrm{B} & & & t + \mathrm{C} & & t^2 + \mathrm{D} & & t^3 + \ldots\ldots \\ \;\;+ \mathrm{A}'l & + \mathrm{B}'l & & & + \mathrm{C}'l & & + \mathrm{D}'l & & + \ldots\ldots \\ \;\;+ \mathrm{A}''l^2 & + \mathrm{B}''l^2 & & & + \mathrm{C}''l^2 & & + \mathrm{D}''l^2 & & + \ldots\ldots \\ \;\;+ \ldots\ldots & & & & + \ldots & & + \ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

dans laquelle les coefficients A, B, C... A', B'... A''... peuvent être déterminés lorsque l'on connaît un nombre suffisant de valeurs de y ou de ses dérivées successives pour des valeurs données de t et de l.

Nous allons appliquer cette méthode pour obtenir, dans le cas de la similitude, des expressions convenables des coordonnées x et y des points de la carte qui correspondent aux points de la sphère ayant pour longitude t et pour colatitude $z = 90° - l$.

Mais d'abord cherchons à mettre en équations les conditions du problème.

Soit (fig. 13) PA le méridien dont la longitude est t, MB un parallèle dont la latitude est l. Soit sur le parallèle PM, M'' le point dont la longitude est $t + dt$, et sur le méridien PA, M' le point dont la latitude est $l - dl$.

La première condition du problème est que l'angle M''MM' soit

(1) Le mémoire de Lambert étant de 1772 et celui de Lagrange de 1781 seulement, le mérite de l'invention semble d'abord appartenir de droit au premier; mais comme la marche suivie par le second et les résultats auxquels il est parvenu constituent un travail beaucoup plus complet et lui sont évidemment propres, nous continuerons à désigner cette projection sous le nom de *projection de Lagrange*.

droit, par suite que les triangles rectangles $\mathrm{M}m''\mathrm{M}''$, $\mathrm{M}m'\mathrm{M}'$ soient semblables ; de plus, pour que les degrés de longitude et de latitude conservent entre eux le même rapport que sur la sphère, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{MM}'}{\mathrm{MM}''}=\frac{dl}{dt\cos l},$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{M}m''}{\mathrm{M}m'}=\frac{dy''}{dx'}=\frac{dt\cos l}{dl}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{M}''m''}{\mathrm{M}'m'}=-\frac{dx''}{dy'}=\frac{dt\cos l}{dl}.$$

Or x et y étant fonctions de t et l, on a généralement

$$dx=\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl,$$

$$dy=\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl.$$

Pour un même méridien, t étant constant, $dt=0$, donc

$$-dx'=\frac{dx}{dl}dl, \quad \text{et} \quad dy'=\frac{dy}{dl}dl.$$

Pour un même parallèle

$$dx''=\frac{dx}{dt}dt, \quad \text{et} \quad dy''=\frac{dy}{dt}dt.$$

Les deux équations de condition sont donc

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{dx}{dl}\cos l, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dl}\cos l$$

Ces équations sont nécessaires et suffisantes, car on voit facilement que si les valeurs de x et de y satisfont à ces équations, les angles d'intersection seront droits et les éléments proportionnels.

Parmi toutes les formes de séries infinies que l'on peut adopter, Lambert (1) remarquant que, d'après les équations de condition, $\frac{dx}{dl}$ et $\frac{dy}{dl}$ doivent être multipliés par $\cos l$, pensa que la forme la plus convenable est

(1) *Entwerfung der Charten...* sect. VI, p. 158.

$$
\begin{array}{llll}
y = \mathrm{A} & + \mathrm{B}t & + \mathrm{C}t^2 & + \ldots\ldots \\
+ \mathrm{A}' \sin l & + \mathrm{B}'t \sin l & + \mathrm{C}'t^2 & + \ldots\ldots \\
+ \mathrm{A}'' \sin 2l & + \mathrm{B}''t \sin 2l & + \mathrm{C}''t^2 \sin 2l & + \ldots\ldots \\
+ \mathrm{A}''' \sin 3l & + \mathrm{B}'''t \sin 3l & + \mathrm{C}'''t^2 \sin 3l & + \ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots & + \ldots\ldots & + \ldots\ldots & + \ldots
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{llll}
x = a & + bt & + ct^2 & + \ldots\ldots \\
+ a' \cos l & + b't \cos l & + c't^2 \cos l & + \ldots\ldots \\
+ a'' \cos 2l & + b''t \cos l & + c''t^2 \cos l & + \ldots\ldots \\
+ a''' \cos 3l & + b'''t \cos 3l & + c'''t^2 \cos 3l & + \ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots & + \ldots\ldots & + \ldots\ldots & + \ldots
\end{array}
$$

Si l'on différentie x et y séparément par rapport à l et par rappor à t, que l'on multiplie $\frac{dx}{dl}$ par cos$l$. ainsi que $\frac{dy}{dl}$, on trouve que pour satisfaire aux deux équations de condition quelles que soient les valeurs de l et de t, on doit avoir

$b = \frac{1}{2}\mathrm{A}'$	$c = \frac{1}{4}\mathrm{B}'$	$d = \frac{1}{6}\mathrm{C}'$
$b' = \frac{1}{2}(2\mathrm{A}'')$	$c' = \frac{1}{4}(2\mathrm{B}'')$	$d' = \frac{1}{6}(2\mathrm{C}'')$
$b'' = \frac{1}{2}(\mathrm{A}'+3\mathrm{A}''')$	$c'' = \frac{1}{4}(\mathrm{B}'+4\mathrm{B}''')$	$d'' = \frac{1}{6}(\mathrm{C}'+3\mathrm{C}''')$
$b''' = \frac{1}{2}(2\mathrm{A}''+4\mathrm{A}^{\mathrm{iv}})$	$c''' = \frac{1}{4}(2\mathrm{B}''+4\mathrm{B}^{\mathrm{iv}})$	$d''' = \frac{1}{6}(2\mathrm{C}''+4\mathrm{C}^{\mathrm{iv}})$
$b^{\mathrm{iv}} = \frac{1}{2}(3\mathrm{A}'''+5\mathrm{A}^{\mathrm{v}})$	$c^{\mathrm{iv}} = \frac{1}{4}(3\mathrm{B}'''+5\mathrm{B}^{\mathrm{v}})$	$d^{\mathrm{iv}} = \frac{1}{6}(2\mathrm{C}'''+5\mathrm{C}^{\mathrm{v}})$
. . . .	. . . .	. . . .

et de même

$\mathrm{B} = \frac{1}{2}a'$	$\mathrm{C} = \frac{1}{4}b'$	$\mathrm{D} = \frac{1}{6}c'$
$\mathrm{B}' = \frac{1}{2}(2a'')$	$\mathrm{C}' = \frac{1}{4}(2b'')$	$\mathrm{D}' = \frac{1}{6}(2c'')$
$\mathrm{B}'' = \frac{1}{3}a'+3a''')$	$\mathrm{C}'' = \frac{1}{4}(b'+3b''')$	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .

La loi de la formation de ces termes est très-simple.

On voit ainsi que

les	b	dépendent des	A		
	c	«	B	et par conséquent des	a
	d	«	C	«	A
les	B	«	a	«	
	C	«	b	et par conséquent des	A
	D	«	c	«	a

. . . .

et ainsi tous les coefficients dépendant de a et de A.

On trouve ainsi :

$$\begin{array}{ll}
b\ \ = \frac{1}{2}(\quad +A') & B\ \ = \frac{1}{2}(\quad +a') \\
b' = \frac{1}{2}(\quad +2A'') & B' = \frac{1}{2}(\quad +2a'') \\
b'' = \frac{1}{2}(A'+3A''') & B'' = \frac{1}{2}(a'+3a''') \\
b''' = \frac{1}{2}(2A''+4A^{\text{iv}}) & B''' = \frac{1}{2}(2a''+4a^{\text{iv}}) \\
b^{\text{iv}} = \frac{1}{2}(3A'''+5A^{\text{v}}) & B^{\text{iv}} = \frac{1}{2}(3a'''+5a^{\text{v}}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
b^k = \frac{1}{2}[(k-1)A^{k-1}+(k+1)A^{k+1}] & B^k = \frac{1}{2}[(k-1)a^{k-1}+(k+1)a^{k+1}].
\end{array}$$

On trouve de même :

$$c^k = \frac{1}{4}[(k-1)B^{k-1}+(k+1)B^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)a^{k-2}+2k^2a^k+(k+1)(k+2)a^{k+2}].$$

$$C = \frac{1}{4}[(k-1)b^{k-1}+(k+1)b^{k+1}] = \frac{1}{2.4}[(k-1)(k-2)A^{k-2}+2k^2A^k+(k+1)(k+2)A^{k+2}].$$

$$d^k = \frac{1}{6}[(k-1)C^{k-1}+(k+1)C^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6}\left\{\begin{array}{l}
\quad (k-1)(k-2)(k-3)a^{k-3} \\
+(k-1)(3k^2-3k+2)a^{k-1} \\
+(k+1)(3k^2+3k+2)a^{k+1} \\
+(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+3}
\end{array}\right.$$

$$e^k = \frac{1}{8}[(k-1)D^{k-1}+(k+1)D^{k+1}] = \frac{1}{2.4.6.8}\left\{\begin{array}{l}
\quad (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)a^{k-4} \\
+(k-1)(k-2)(4k^2-8k+8)a^{k-2} \\
+k^2(6k^2+10)a^k \\
+(k+1)(k+2)(4k^2+8k+8)a^{k+2} \\
+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a^{k+4}
\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

14. Nous allons, avec Lambert, considérer un cas particulier où cette méthode se simplifie beaucoup.

Représentons (fig. 13) le méridien du milieu de la projection par une droite sur laquelle nous porterons les degrés égaux de latitude, l'équateur par une seconde droite perpendiculaire à la première, et les méridiens et les parallèles par des courbes se coupant à angle droit, de manière que les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude. Cherchons quelles doivent être les valeurs de x et de y en fonction de t et de l.

En prenant pour axes des coordonnées le méridien moyen et l'équateur, on voit que, la figure étant nécessairement symétrique par rapport à ces axes, y devra être exprimé par des puissances paires de t et impaires de l, et x par des puissances paires de l et im-

paires de t. En outre, si l'on fait $l = 0$, y sera nul aussi et x devra être exprimé par une fonction de t seulement. Si enfin l'on fait $t = 0$, il faudra que $y = l$ et $x = 0$.

Ces séries devront donc être de la forme

$$\begin{aligned} y = {} & \mathrm{K}l + \mathrm{A}t^2l + \mathrm{A}'t^2l^3 + \mathrm{A}''t^2l^5 + \ldots.. \\ & + \mathrm{B}t^4l + \mathrm{B}'t^4l^3 + \mathrm{B}''t^4l^5 + \ldots.. \\ & + \mathrm{C}t^6l + \mathrm{C}'t^6l^3 + \mathrm{C}''t^6l^5 + \ldots.. \\ & + \mathrm{D}t^8l + \ldots.. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & at + a'tl^2 + a''tl^4 + a'''tl^6 + \ldots.. \\ & + bt^3 + b't^3l^2 + b''t^3l^4 + b'''t^3l^6 + \ldots.. \\ & + ct^5 + c't^5l^2 + c''t^5l^4 + \ldots.. \end{aligned}$$

En satisfaisant aux deux équations de condition

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l,$$

ainsi qu'aux condition du problème que nous venons d'énoncer, on détermine facilement les coefficients, K, A, A'..., a, a'... b..., et l'on arrive aux deux séries

$$\begin{aligned} y = {} & l + \frac{1}{2}t^2l - \frac{4}{2}\frac{1}{1.2.3}t^2l^3 + \frac{16}{2}\frac{t^2l^5}{1.2.3.4.5} - \frac{64}{2}\frac{t^2l^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots. \\ & + \frac{5}{2}t^4l - \frac{7}{18}t^4l^3 + \frac{5}{18}t^4l^5 - \ldots.. \\ & + \frac{61}{720}t^6l - \frac{443}{1440}t^6l^3 - \ldots.. \\ & + \frac{139}{4032}t^8l - \ldots.. \\ & + \ldots.. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & t - \frac{1}{2}tl^2 + \frac{1}{1.2.3.4}tl^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}tl^6 + \ldots.. \\ & + \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^3l^2 + \frac{41}{144}t^3l^4 - \frac{73}{864}t^3l^6 + \ldots.. \\ & + \frac{1}{24}t^5 - \frac{61}{240}t^5l^2 + \frac{191}{480}t^5l^4 - \ldots.. \\ & + \frac{61}{5040}t^7 - \frac{139}{1008}t^7l + \ldots.. \\ & + \frac{139}{28224}t^9 + \ldots.. \\ & + \ldots.. \end{aligned}$$

En groupant les coefficients des mêmes puissances de t, on peut écrire

$$y = l + \frac{1}{4}\sin 2l t^2 + \frac{4\sin 2l + 3\sin 4l}{4.8.1.3} t^4 + \frac{34\sin 2l + 60\sin 4l + 30\sin 6l}{4.8.12.1.3.5} t^6$$
$$+ \frac{496\sin 2l + 1512\sin 4l + 1620\sin 6l + 630\sin 8l}{4.8.12.16.1.3.5.7} t^8$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x = t\cos l + \frac{\cos l + \cos 3l}{4.1.3} t^3 + \frac{4\cos l + 10\cos 3l + 6\cos 5l}{4.8.1.3.5} t^5$$
$$+ \frac{34\cos l + 154\cos 3l + 210\cos 5l + 90\cos 7l}{4.8.12.1.3.5.7} t^7$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Groupons maintenant les termes en $\sin\ 2l$, $\sin 4l$, $\sin 6l \ldots$ dans l'expression de y, et les termes en $\cos l$, $\cos 3l$, $\cos 5l \ldots$ dans l'expression de x ; nous trouverons

$$y = l + \sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 4l \operatorname{tang}^4\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin 6l \operatorname{tang}^6\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 8 \operatorname{tang}^8\frac{t}{2} + \ldots..$$
$$x = 2\cos l \operatorname{tang}\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos 3l \operatorname{tang}^3\frac{t}{2} + \frac{2}{5}\cos 5l \operatorname{tang}^5\frac{t}{2} + \frac{2}{7}\cos 7l \operatorname{tang}^7\frac{t}{2} + \ldots..$$

On trouve enfin, en groupant convenablement les termes :

$$y = l + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - \cos 2l \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right),$$
$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1 - 2\operatorname{tang}\frac{t}{2}\cos l + \operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}\right).$$

ou, en posant $z = 90° - l$,

$$y = 90° - z + \operatorname{arc\,cotang}\left(\operatorname{cotang} 2z + \operatorname{cotang}^2\frac{z}{2}\operatorname{coséc} 2z\right),$$
$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \sin z \sin t}{1 - \sin z \sin t}\right),$$

ou plus simplement

(I) $\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{tang} z.$

(II) $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\operatorname{coséc} z + \sin t}{\operatorname{coséc} z - \sin t}\right).$

Il est facile, pour vérifier ces formules, de former

$$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dz}, \frac{dx}{dz},$$

et de voir que les équations de condition

$$\frac{dy}{dz}\sin z = -\frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dz}\sin z = \frac{dy}{dt}$$

sont satisfaites.

La formule

$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin z \sin t}{1-\sin z \sin t}\right)$$

montre que x dépend de z de la même manière que de t, de telle sorte que pour des valeurs telles que $z = 40°$ et $t = 60°$, on obtiendrait pour x la même valeur que pour le groupe $z = 60°$ et $t = 40°$.

Si l'on fait $z = 90°$, c'est-à-dire $l = 0°$, on obtient

$$x_0 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) = \log\tang\left(45° + \frac{t}{2}\right),$$
$$y_0 = 0;$$

ce qui montre que les degrés de l'équateur comptés à partir du centre C augmentent de la même manière que les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator.

Si l'on fait $t = 90°$, on obtient

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin z}{1-\sin z} = \log\tang\left(45° + \frac{z}{2}\right),$$
$$y = 90°;$$

ce qui montre que le méridien distant de 90° du méridien central, est parallèle à l'équateur, et que, à partir du pôle, les degrés augmentent sur ce méridien comme les degrés de longitude sur l'équateur, ou comme les degrés de latitude dans les cartes marines de Mercator. Comme les parallèles coupent les méridiens à angles droits, ils s'écartent de plus en plus du pôle P (fig. 13) en allant du méridien de départ PC au méridien de 90°, PD; et, sur ce dernier méridien, ils deviennent parallèles à CP. Au-dessus du méridien PD ils passent par les positions symétriques de celles qu'ils ont occupées au-dessous, de manière à former des ovales dont le demi grand axe

est PD, le demi petit axe PB, et qui s'allongent d'autant plus que la latitude diminue.

Cherchons quelle est l'altération des surfaces dans cette projection. Considérons pour cela la petite surface comprise entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins. Cet élément peut être évalué par le produit des arcs infiniment petits de parallèles et de méridiens ; or un arc de courbe est exprimé par

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Formons donc dy et dx à l'aide des formules (I) et (II). Nous trouvons

$$dy = \frac{\cos t dl + \sin l \cos l \sin t dt}{1 - \cos^2 l \sin^2 t};$$

$$dx = \frac{\cos l \cos t dt - \sin t \sin l dl}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Pour un méridien $dt = 0$, nous obtenons alors

$$ds_m = \frac{dl}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Pour un parallèle $dl = 0$, et nous obtenons

$$ds_p = \frac{dt \cos l}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}}.$$

Le petit rectangle considéré est donc exprimé par

$$\frac{dt\, dl \cos l}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

Le numérateur exprime justement le rectangle correspondant sur la sphère; le rapport d'agrandissement des surfaces est donc

$$m^2 = \frac{1}{1 - \cos^2 l \sin^2 t}.$$

On voit que si $t = 0$, $m^2 = 1$, ce qui montre que l'altération des surfaces est nulle le long du méridien central.

Si donc la carte tracée d'après cette projection ne contient qu'un petit nombre de degrés de longitude, elle jouira des avantages suivants :

1° les angles y seront partout conservés, et par conséquent les méridiens et les parallèles se couperont partout à angles droits ;

2° les degrés de latitude y seront égaux sur le méridien du milieu représentés par une droite, et ceux de longitude, aux environs de ce méridien, ne différeront que très-peu de leur véritable grandeur.

Ce système conviendra donc aux pays tels que l'Amérique qui, peu étendus en longitude, pourront avoir, en latitude, une longueur aussi grande que l'on voudra. L'Afrique aussi se prêtera assez bien à ce genre de projection, en prenant pour méridien central celui de 20° longitude est.

On trouvera dans la table du chap. XII (2° partie), les valeurs de x et de y pour les valeurs de l et de t, de 10 en 10 degrés. La mappemonde n° IX est construite sur cette projection.

Nous montrerons, en traitant des projections cylindriques (ch. VI, § 26), que ce système peut être considéré comme une projection de Mercator transverse, c'est-à-dire comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long du premier méridien, sous la condition de conservation des angles. C'est cette considération qui nous fait adopter, pour désigner ce système de représentation, le nom de *projection cylindrique orthomorphe de Lambert*.

15. Avant de terminer le chapitre des projections orthomorphes, nous ferons remarquer que lorsque l'on connaît l'une des deux équations de la projection, c'est-à-dire soit la valeur de x, soit la valeur de y, il est facile de trouver l'autre.

Nous avons en effet obtenu au § 13, pour équations de condition nécessaires et suffisantes,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dl}\cos l \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dl}\cos l.$$

Il en résulte que l'on a :

$$dx = \frac{dy}{dl}\cos l\,dt - \frac{dy}{dt}\frac{1}{\cos l}\,dl,$$

$$dy = \frac{dx}{dt}\frac{1}{\cos l}\,dl - \frac{dx}{dl}\cos l\,dt.$$

Si donc on donne la valeur de x par exemple, on formera $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dl}$ et l'on en déduira la valeur de dy dont l'intégration fera connaître l'équation en y.

Ainsi si l'on donne $y = t$, il est facile d'obtenir x, car

$$\frac{dy}{dt} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dl} = 0\,;$$

donc

$$dx = -\frac{dl}{\cos l},$$

et par conséquent

$$x = \log \operatorname{tang} \frac{90° - l}{2}.$$

Nous obtenons ainsi la projection des cartes marines ou de Mercator.

16. Littrow (1) a considéré la projection dont l'une des équations est

$$x = \log l \cos t.$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{tang} l \sin t \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dl} = \frac{\cos t}{\cos^2 l};$$

donc

$$dy = -\frac{(\sin l \sin t dl + \cos t \cos l dt)}{\cos^2 l},$$

dont l'intégrale est

$$y = -\frac{\sin t}{\cos l};$$

de sorte que les équations de cette projection sont

$$x = \operatorname{tang} l \cos t \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{\sin t}{\cos l}.$$

En éliminant soit t, soit l, on obtient pour équation des parallèles et pour équation des méridiens

$$y^2 \sin^2 l + x^2 = \operatorname{tang}^2 l,$$
$$y^2 \cos^2 t - x^2 \sin^2 t = \sin^2 t \cos^2 t.$$

Ces deux équations représentent, la première des ellipses, la seconde des hyperboles, dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le grand axe est dans l'axe des y.

(1) *Chorographie von* Littrow, p. 142, Vienne, 1833.

NOTE

SUR LA CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. Tchébychev,

Lue, le 18 janvier 1853, à l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg.

17. « Dans la construction des cartes géographiques, on parvient facilement à reproduire la figure d'une partie quelconque de la surface du globe de manière qu'il y ait constamment similitude entre ses éléments infiniment petits et leur représentation sur la carte. Mais le rapport d'agrandissement de différents éléments n'ayant pas la même valeur, les portions finies de la surface du globe, dans leur représentation sur la carte, se déforment plus ou moins, suivant les déviations de ce rapport de sa valeur normale, et comme ces déviations, dans les différents systèmes de tracé des cartes, présentent des valeurs plus ou moins considérables, on conçoit qu'il existe un système qui, dans la représentation d'une portion donnée de la surface du globe, réduit ces déviations au *minimum*, et par conséquent représente sa figure le mieux possible. C'est de la détermination de ce système de tracé des cartes que nous allons nous occuper. La question que nous aurons à résoudre présente une grande analogie avec celles qui ont été l'objet de notre mémoire intitulé : *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (*Mémoires des savants étrangers*, t. VII), où nous avons cherché, par un choix convenable des constantes d'une fonction donnée, à diminuer, autant que possible, ses déviations d'une autre fonction, pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre des limites données. Sous la condition d'un minimum de cette espèce, nous aurons à présent à chercher une fonction à deux variables, assujettie à vérifier une certaine équation aux différentielles partielles. Pour simplifier les formules, nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre, mais la même méthode peut être facilement étendue à toutes les hypothèses possibles sur la forme du globe.

« D'après la notation de *Lagrange* (1), le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi

(1) *Voir* chap. 2, § 2.

$$m = \frac{\sqrt{F'(u+t\sqrt{-1})\,F'_1(u-t\sqrt{-1})}}{\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}},$$

ce qui donne

$$\log m = \frac{1}{2}\log\left[F'(u+t\sqrt{-1})\right] + \frac{1}{2}\log\left[F'(u-t\sqrt{-1})\right] - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

où la partie positive, composée des fonctions arbitraires, n'est évidemment que l'intégrale de cette équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0.$$

Donc, les écarts du rapport d'agrandissement dépendent des déviations de la fonction $\log\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}$ et de l'intégrale de cette équation. Or d'après les propriétés remarquables de cette équation, on parvient à reconnaître que le minimum de déviation de son intégrale de la fonction $\log\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}$ dans l'espace limité par une courbe quelconque, ne peut avoir lieu à moins que la différence

$$U - \log\frac{2}{e^u+e^{-u}},$$

sur cette courbe, n'ait constamment la même valeur.

« Donc par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{dt^2} = 0;$$

sous cette condition, on aura la valeur de

$$U = \frac{1}{2}\left[F'(u+t\sqrt{-1})\right] + \frac{1}{2}\log\left[F'(u-t\sqrt{-1})\right],$$

à une constante arbitraire près, et de là on tirera les valeurs des fonctions

$$F'(u+t\sqrt{-1}), \quad F'_1(u-t\sqrt{-1}),$$

qui, à un facteur constant près, seront celles qui donnent la projection la plus avantageuse. Quant à leur facteur constant, qui reste

inconnu, il se détermine facilement d'après la valeur normale du rapport d'agrandissement.

« D'après cela on parvient facilement à assigner tous les cas dans lesquels on peut parvenir à la projection de la carte la plus précise, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle. Dans son Mémoire Lagrange a montré que, dans toutes les méthodes qui jouissent de cette propriété très-importante pour la pratique, le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi :

$$m = \frac{1}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}]}$$

« Donc, d'après ce que nous venons de dire, ces méthodes de projection ne peuvent donner la représentation la plus précise d'un pays quelconque, à moins que sur les bornes de ce pays on n'ait

$$\log m = -\log\left\{\frac{2}{e^u + e^{-u}}[a^2 e^{2cu} + 2ab\cos 2c(t-g) + b^2 e^{-2cu}]\right\} = \text{Const}^e,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1)\begin{cases}\log m = -\log\frac{2}{e^u + e^{-u}} - \log\left(ae^{cu+c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu-c(t-g)\sqrt{-1}}\right)\\ \qquad -\log\left(ae^{cu-c(t-g)\sqrt{-1}} + be^{-cu+c(t-g)\sqrt{-1}}\right) = \text{Const}^e.\end{cases}$$

« Pour simplifier cette équation, nous transformerons les coordonnées, en prenant le point où $\log m$ devient *minimum* pour le pôle, et pour premier méridien celui qui passe par le pôle primitif. Soit t_0 et $90° - z_0$ la longitude et la latitude de ce point, et convenons de désigner par T et $90° - Z$ la longitude et la latitude dans le nouveau système des coordonnées. Si l'on observe que, d'après la notation de Lagrange que nous employons, u désigne $\log\left(\tang\frac{z}{2}\right)$, $90° - z$ étant la latitude relativement au premier pôle et t la longitude, on parviendra facilement à ces équations très-simples :

$$e^{u+t\sqrt{-1}} = \tang\frac{z}{2}e^{t\sqrt{-1}} = \frac{\tang\frac{z_0}{2} + \tang\frac{Z}{2}e^{T\sqrt{-1}}}{1 - \tang\frac{z_0}{2}\tang\frac{Z}{2}e^{T\sqrt{-1}}}e^{t_0\sqrt{-1}};$$

$$e^{u-t\sqrt{-1}} = \operatorname{tang}\frac{z}{2}e^{-t\sqrt{-1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}+\operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}{1-\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{Z}{2}e^{-T\sqrt{-1}}}e^{-t_0\sqrt{-1}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (I), et en remarquant que log m devient minimum pour $Z=0$, nous trouvons que cette équation, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, devient

$$\frac{1-4c^2}{\sin^2 z_0}(\cos^2 T-\sin^2 T)\operatorname{tang}^2\frac{Z}{2}+\operatorname{tang}^2\frac{Z}{2}=C^{te};$$

et, comme dans la projection stéréographique, à un facteur constant près, on a

$$x=\operatorname{tang}\frac{Z}{2}\sin T,\qquad y=\operatorname{tang}\frac{Z}{2}\cos T;$$

ces équations nous donnent

$$\frac{\sin^2 z_0+4c^2-1}{\sin^2 z_0}x^2+\frac{\sin^2 z_0-4c^2+1}{\sin^2 z_0}y^2=\text{Const}^{te}.$$

« Donc si l'on cherche la projectiond'un pays assez petit, en prenant pour les méridiens et les parallèles des arcs de cercle, la projection ne peut s'approcher notablement de celle de la plus précise, à moins que ses limites, dans leur projection stéréographique, aux quantités de l'ordre $\operatorname{tang}^3\frac{Z}{2}$ près, ne vérifient cette dernière équation, et par conséquent ne présentent une courbe du second degré qui sera évidemment une ellipse, car cette courbe doit être fermée.

« D'après l'équation précédente. on voit qu'un des axes de cette ellipse suit la direction du méridien et que leur rapport est égal à

$$\sqrt{\frac{\sin^2 z_0-4c^2+1}{\sin^2 z_0+4c^2-1}}.$$

« Donc, s'il s'agissait de projeter une portion de la surface du globe, limitée par une pareille courbe dont les axes sont en rapport de $1:n$, l'exposant de projection serait déterminé ainsi

$$(2c)^2=1+\frac{n^2-1}{n^2+1}\sin^2 z_0.$$

« Cette équation nous montre qu'il existe une liaison intime entre la configuration d'un pays et la valeur la plus avantageuse de l'exposant pour sa projection.

« D'après les équations dont nous venons de parler, quelle que soit la forme du pays, on peut déterminer et le centre de projection et la valeur de l'exposant, de la manière la plus avantageuse pour la précision de la carte. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans un Mémoire détaillé sur la construction des cartes géographiques. »



CHAPITRE III.

PROJECTIONS SANS ALTÉRATION DES SURFACES OU ÉQUIVALENTES.

1. Pour obtenir l'équivalence des surfaces correspondantes de la carte et du sphéroïde, nous allons égaler la surface d'un quelconque des petits quadrilatères rectangles formés sur le sphéroïde par deux parallèles et deux méridiens infiniment rapprochés, à la surface du quadrilatère correspondant de la carte, quadrilatère qui, ainsi que nous l'avons montré (chap. I, § 9), peut être assimilé à un parallélogramme.

En appelant, comme nous l'avons déjà fait, r le rayon du parallèle dont la latitude est l, s l'arc du méridien compté depuis le pôle, ce quadrilatère a pour surface

$$ar.dsdt,$$

et comme r et ds sont des fonctions connues de l, on peut le représenter par

$$Ldtdl,$$

en posant

$$L = ar\frac{ds}{dl} = \frac{a^2\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^2}.$$

Les points de la projection qui correspondent aux sommets de ce rectangle ont respectivement pour coordonnées

$$x,y\left|x+\frac{dx}{dt}dt,\ y+\frac{dy}{dt}dt\right|x+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dl}dl\left|x+\frac{dx}{dt}dt+\frac{dx}{dl}dl,\ y+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dl}dl.\right.$$

La surface de ce parallélogramment rectiligne est facile à évaluer (fig. 14); c'est la différence des deux rectangles $bb_2a_1b_1$ et $a'a'_1a_1a_2$,

$$\frac{dx}{dt}dt.\frac{dy}{dl}dl - \frac{dx}{dl}dl.\frac{dy}{dt}dt.$$

La condition d'égalité des surfaces sur la carte et sur le sphéroïde est donc exprimée par la relation

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl}-\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt}=\mathrm{L}, \qquad (1)$$

dans laquelle L est une fonction connue de l, égale à $a^2 \cos l$ dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Si nous prenons pour x une fonction quelconque φ de t et l, les dérivées partielles $\frac{dx}{dt}=p$ et $\frac{dx}{dl}=q$, seront des fonctions connues de ces deux variables, et l'expression générale de y s'obtiendra par l'intégration de l'équation aux différentielles partielles

$$p\frac{dy}{dl}-q\frac{dy}{dt}=\mathrm{L}.$$

On sait que cette intégration se ramène à celle des opérations différentielles simultanées

$$\frac{dl}{p}=-\frac{dt}{q}=\frac{dy}{\mathrm{L}},$$

On en déduit

$$pdt+qdl=0,$$

équation dont l'intégrale est

$$\varphi(l.\,t)=\mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. De plus

$$dy=\frac{\mathrm{L}dl}{p}.$$

Or si nous supposons l'équation $\varphi\,(l,\,t)=\mathrm{C}$ résolue par rapport à t et que nous substituions à t cette valeur dans l'expression de p, le résultat, que nous désignerons par $p_{(l,\,c)}$, ne sera plus qu'une fonction de l, et il sera alors *théoriquement* possible de trouver l'intégrale de $\frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}$; on pourra donc écrire.

$$y=\mathrm{C}'+\int\frac{\mathrm{L}dl}{p_{(l,\,c)}}.$$

Nous obtiendrons alors l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles en établissant entre les deux constantes C et C' une relation arbitraire quelconque ; et comme

$$\varphi(l,\,t)=x,$$

puisque l'on a en général

$$pdt + qdl = dx,$$

les équations définitives de conservation des surfaces sont

$$x = \varphi(l,t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{\mathrm{L}dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

à la condition de regarder x comme une constante dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$.

Réciproquement, si ces équations sont satisfaites, les surfaces seront conservées. Soit en effet

$$\Psi(l,x) = \int \frac{\mathrm{L}dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(l,x)}},$$

l'intégrale obtenue en considérant x comme constante. Prenons les dérivées partielles de y,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} f'(x) + \frac{dx}{dt}\frac{d\Psi}{dx},$$
$$\frac{dy}{dl} = \frac{dx}{dl} f'(x) + \frac{dx}{dl}\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dl};$$

multiplions la seconde par $\frac{dx}{dt}$, la première par $\frac{dx}{dl}$, et retranchons,

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dl} - \frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt} = \frac{d\Psi}{dl}\cdot\frac{dx}{dt} = \mathrm{L},$$

et cette équation implique nécessairement la conservation des surfaces.

Remarquons que si le système des deux équations

$$x = \varphi(t,l), \quad y = \Psi(t,l)$$

est une solution de l'équation (I), on peut en déduire une infinité d'autres solutions en posant

$$x = \varphi(t,l), \quad y = f(x) + \Psi(l,t),$$

où f représente une fonction arbitraire quelconque de x.

2. Comme application des formules générales auxquelles nous sommes arrivés, prenons

$$\varphi(t, l) = at \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

alors $\frac{dx}{dt} = a$, et par conséquent

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}dl.$$

Si nous supposons la terre sphérique, L, c'est-à-dire $r\frac{ds}{dt}$, se réduit à ar ou $a^2 \cos l$; il vient donc

$$y = a \sin l.$$

On obtient ainsi un canevas dont les méridiens sont des droites parallèles et également espacées, et les parallèles d'autres droites perpendiculaires aux premières et distantes de l'équateur du sinus de la latitude correspondante. On voit de suite que ce système revient à circonscrire à la sphère un cylindre tangent le long de l'équateur et à projeter chaque point de la surface sphérique orthogonalement sur la surface cylindrique, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe du cylindre, puis à développer la surface extérieure sur un plan.

Si l'on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre, on est conduit à chercher l'intégrale de Ldl, c'est-à-dire de $\frac{a^2(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin l)^2}$.

Posons $\sin l = u$; nous pourrons écrire

$$y = \frac{1}{a}\int \mathrm{L}dl = a(1-e^2)\int\frac{\cos l dl}{(1-e^2\sin^2 l)^2} = a(1-e^2)\int\frac{du}{1-e^2u^2}$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\frac{u}{2}}{1-e^2u^2} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+eu}{1-eu} + \mathrm{C}\right]$$

$$= a(1-e^2)\left[\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)} + \frac{1}{4e}\log\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l} + \mathrm{C}\right].$$

Si l'on veut que y s'annule avec l, il faut faire $\mathrm{C} = 0$,

Développons $\frac{\sin l}{2(1-e^2\sin^2 l)}$ et $\log(1+e\sin l) - \log(1-e\sin l)$ en séries, et négligeons les puissances de e supérieures à la troisième, nous pourrons écrire

$$y = a(1-e^2)(\sin l + \tfrac{2}{3}e^2\sin^3 l),$$

ou enfin

$$y = a \sin l - ae^2 \sin l \left(1 - \tfrac{2}{3} \sin^2 l\right).$$

Nous reviendrons plus tard sur cette projection ; disons de suite que les régions voisines de l'équateur sont assez exactement représentées, mais que l'altération croît très-rapidement jusqu'aux pôles qui sont, comme dans la projection de Mercator, représentés par deux droites parallèles, de telle sorte que les zones polaires sont allongées suivant les parallèles et aplaties suivant les méridiens. Ce système n'est donc pas admissible pour les mappemondes, et son emploi doit être borné aux cartes des pays peu éloignés de l'équateur ou comprenant cette ligne, dont on veut conserver les surfaces sans s'occuper de la déformation des contours. Nous le désignerons sous le nom de *projection isocylindrique droite de Lambert.*

La mappemonde n° X a été construite d'après ce système.

3. Pour les pays tels que l'Amérique, qui ont leur plus grande étendue du nord au sud, Lambert propose de retourner en quelque sorte ce genre de projection de façon à représenter le méridien moyen par une droite divisée en degrés égaux, et l'équateur par une perpendiculaire divisée comme l'était la ligne des pôles dans la projection précédente, c'est-à-dire suivant les sinus des longitudes.

Ainsi les conditions du problème sont que, pour $t = 0$, $x = 0$ et $y = l$, et que, pour $l = 0$, $x = \sin t$ et $y = 0$.

On voit de suite que la valeur de x, $\varphi(l, t)$, qui satisfait à ces conditions, doit être

$$x = \sin t \cos l.$$

Nous en tirons

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \cos l, \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x} = \sqrt{\cos^2 l - x^2}.$$

Comme x doit être nul avec l, il faut que $f(x) = 0$. Il reste donc

$$y = \int \frac{\cos l\,dl}{\sqrt{\cos^2 l - x^2}} = \text{arc}\sin \frac{\sin l}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Les équations de la projection sont donc

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = \sin t \cos l, \\ \sin y = \dfrac{\sin l}{\sqrt{1 - \sin^2 t \cos^2 l}}, \quad \text{ou} \quad \tang y = \dfrac{\tang l}{\cos t}. \end{cases}$$

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique droite,

est parvenu à celle-ci, que nous désignerons sous le nom de *projection isocylindrique transverse*, par une simple transformation de coordonnées applicable à toutes les projections cylindriques et que nous exposerons plus loin (chap. VI, § 26).

Revenons aux équations de ce système. Nous obtiendrons les équations des méridiens et des parallèles en éliminant soit l soit t entre les valeurs de x et de y.

En éliminant l, on trouve pour équation des méridiens

$$x^2(1+\text{tang}^2 y\cos^2 t)=\sin^2 t.$$

En éliminant t, on trouve pour équation des parallèles

$$\text{tang}^2 y(\cos^2 l-x^2)=\sin^2 l.$$

Ces deux genres de courbes sont transcendants, de sorte qu'il faudra toujours les construire par joints que l'on réunira ensuite par un trait continu ; mais la connaissance des équations nous permet de faire quelques remarques sur la forme du canevas.

On voit d'abord que la projection doit être symétrique par rapport au méridien du milieu à partir duquel se comptent les longitudes, et par rapport à l'équateur ; que le méridien de 90° de longitude est parallèle à l'équateur, et que, si l'on continue à faire croître la longitude au delà de 90°, on obtient au-dessus de ce méridien rectiligne une figure parfaitement semblable à celle déjà construite au-dessous ; il en résulte qu'une projection polaire d'un hémisphère serait symétrique par rapport aux méridiens de 0° et de 90° de longitude, perpendiculaires l'un sur l'autre.

Cherchons maintenant les tangentes aux méridiens et aux parallèles aux points principaux de la figure. On sait que l'angle α de la tangente à une courbe avec l'axe des x a pour tangente trigonométrique $\frac{dy}{dx}$.

Pour les méridiens nous trouvons

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(1+\text{tang}^2 l)\cos t}{(\cos^2 t+\text{tang}^2 l)\sin t\sin l}.$$

Si nous faisons $l=0$, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{\cos t}{0}=\infty,$$

ce qui montre que les méridiens coupent l'équateur à angles droits.

Pour $l = 90°$, c'est-à-dire au pôle, la tangente de l'angle que fait un méridien avec le méridien de départ, c'est-à-dire $\frac{dx}{dy}$, est égale à

$$-\left[\frac{(\cos^2 t + \tang^2 l)\sin t}{(1+\tang^2 l)\cos t}\right]_{90} = \left[\frac{\left(\frac{\cos t}{\tang^2 l}+1\right)\sin t}{\left(\frac{1}{\tang^2 l}+1\right)\cos t}\right]_{90} = \tang t,$$

ce qui montre que les méridiens font aux pôles leurs véritables angles t avec le méridien principal.

Pour les parallèles nous trouvons de même

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin l \tang t}{\cos^2 l(\cos^2 t + \tang^2 l)}.$$

Pour $t = 0$, $\frac{dx}{dy} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien principal, et pour $t = 90°$, $\frac{dy}{dx} = \infty$, ce qui montre que les parallèles sont perpendiculaires au méridien de 90° de longitude.

Le canevas n° XI a été construit dans ce système à l'aide des tables du chapitre X (2ᵉ partie).

4. Revenons maintenant aux équations générales des projections équivalentes

$$x = \varphi(l, t),$$
$$y = f(x) + \int \frac{L dl}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{l,x}}:$$

Nous pouvons disposer de l'indétermination des deux fonctions φ et f dans ces équations, pour imposer à notre système de représentation une autre propriété que la conservation des surfaces; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angles droits.

Or si nous calculons l'angle φ d'un méridien et d'un parallèle de la carte, nous trouvons

$$\tang \varphi = \frac{\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{dx}{dl}}.$$

Pour que φ soit égal à 90°, il faut donc que

$$\frac{dy}{dl}\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dl}\frac{dx}{dt}=0;$$

en y joignant l'équation générale

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dt}=\mathrm{L},$$

on a les deux équations du problème.

M. Bonnet a montré que la question se ramenait à la résolution d'une équation aux différentielles partielles du second ordre et a trouvé l'intégrale de cette équation; mais comme les applications que l'on peut en faire relativement aux systèmes de représentation offrent peu d'intérêt au point de vue pratique, nous ne nous y arrêterons pas.

5. La détermination des fonctions arbitraires, par la condition que les méridiens et les parallèles de la carte soient des courbes d'une espèce donnée, constitue un problème qu'il est peut être impossible de résoudre d'une manière générale, mais dont quelques cas particuliers se présentent facilement.

Cherchons, par exemple, les formules qui expriment tous les systèmes dans lesquels les parallèles sont représentés par des droites parallèles.

Si nous prenons l'équateur pour axe des x, nous voyons que y doit être indépendant de la longitude t, et que l'on pourra, par conséquent, poser

$$y=\mathrm{F}(l).$$

Il en résulte que l'on doit faire, dans les formules générales,

$$f(x)=0,$$

et que $\frac{dx}{dt}$ doit être indépendant de t; x devra donc être de la forme

$$x=t\varphi(l)+\Psi(l),$$

ou simplement

$$x=t\varphi(l),$$

si l'on se donne la condition de x nul avec t; de sorte que l'on pourra écrire

$$y=\int\frac{\mathrm{L}\,dl}{\varphi(l)}=\mathrm{F}(l).$$

On en tire

$$\varphi(l) = \frac{L}{F'(l)},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{tL}{F'(l)} \quad \text{et} \quad y = F(l),$$

sont les équations du problème.

En remplaçant L par sa valeur $\frac{a^2 \cos l\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2}$, nous obtenons les deux équations

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2\,F'(l)}.$$

Si l'on suppose la terre sphérique, ces formules se réduisent à

$$y = F(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l}{F'(l)}. \qquad \text{(II)}$$

L'expression générale de l'ordonnée x montre que pour des différences égales de latitudes, les courbes méridiennes divisent les parallèles en parties égales.

M. le capitaine du génie *de Prépetit-Foucaut* (1) est parvenu au même résultat en traitant directement la question pour le cas de la terre sphérique. L'aire de la zone *abef* (fig. 15) comprise entre le méridien AP, un méridien quelconque P*ef*E, les deux cercles parallèles infiniment voisins *eb* et *af*, a pour mesure l'arc de l'équateur AE multiplié par la hauteur de la zone, soit

$$a^2 t \cos l\,dl.$$

Si nous traçons deux axes rectangulaires A'P', A'E', que nous prenions le premier pour représenter le méridien principal rectifié, le second pour représenter l'équateur, la courbe des méridiens sera déterminée par la condition que le rectangle *a'b'e'f'* soit égal à la portion de zone sphérique *abef*; nous aurons

$$x\,dy = a^2 t \cos l\,dl.$$

Représentons par

$$y = F(l)$$

(1) *Notice sur la construction de nouvelles mappemondes et de nouveaux atlas*, lithographiée à Arras en 1862.

la loi d'espacement des parallèles; les équations du système de projection considéré pourront s'écrire

$$y = \mathrm{F}(l); \qquad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Pour avoir l'équation des méridiens, il suffira d'éliminer l entre ces deux équations.

Traitons quelques applications de ces dernières formules.

6. L'expression la plus simple de y est évidemment

$$y = nal,$$

n étant une constante arbitraire.

Alors

$$\mathrm{F}'(l) = na,$$

$$x = \frac{at}{n} \frac{\cos l(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^2},$$

et si nous supposons la terre sphérique,

$$x = \frac{at}{n} \cos l.$$

Les méridiens sont donc des sinusoïdes qui partagent les parallèles en parties égales, et les parallèles sont des droites espacées comme les parallèles de la terre.

Si l'on suppose $n = 1$, les équations se réduisent pour le cas de la sphère à

$$y = al \quad \text{et} \quad x = at \cos l,$$

ce qui montre que les degrés de parallèles conservent sur la carte leur véritable grandeur. On obtient ainsi la projection imaginée en 1650 par le géographe français *Sanson* (1) et nommée improprement *projection de Flamsteed* (2); nous la désignerons sous le nom de *projection sinusoïdale de Sanson*, et comme elle a été souvent

(1) *Voir* à la bibliothèque Impériale l'atlas in-folio n° 3377 comprenant l'Asie, l'Afrique, les deux Amériques et plusieurs cartes de détail par Nicolas SANSON, d'Abbeville, publiées en 1650 d'après cette projection, ainsi que la carte d'Europe par Nicolas SANSON, fils du précédent. L'ensemble des cartes des Sanson a été réédité plusieurs fois par leurs fils et petits-fils, et par Robert de Vaugondy en 1755.

(2) Cette projection, citée dans l'ouvrage anglais : *The construction of maps and globes in two parts...* Londres, 1717, in-8, p. 81 à 83, fut employée par l'astronome anglais Jean FLAMSTEED pour la rédaction d'un atlas céleste commencé en 1700 et publié en 1729 sous le titre : *Atlas cœlestis by the late Reverend M. John* FLAMSTEED, *London*, 1729, gr. in-folio.

employée par les géographes même pour représenter la surface entière du globe dans une sorte d'ovale dont le grand axe est double du petit, nous l'étudierons plus loin avec plus de détails (1). La table II, qui renferme les valeurs des degrés de longitude pour les parallèles de degré en degré, rend très-facile la construction de cette projection sur laquelle a été tracée la mappemonde XVIII.

Nous voyons de suite que, l'angle d'intersection des méridiens et des parallèles n'étant droit que sur le méridien du milieu et sur l'équateur et s'écartant très-rapidement de 90° à mesure que la latitude augmente, cette projection ne peut convenir que pour les pays situés de part et d'autre de l'équateur et peu étendus en latitude.

7. Si l'on voulait que x fût fonction de t seulement, et par conséquent que les méridiens fussent représentés par des droites perpendiculaires à l'équateur, il suffirait de poser

$$x = \frac{t}{n},$$

et alors

$$F'(l) = n \cos l;$$

donc

$$y = F(l) = n \sin t.$$

On obtiendrait ainsi la projection isocylindrique droite de Lambert (§ 2).

M. de Prépetit-Foucaut a indiqué le système qu'il a appele *stéréographique équivalent* dans lequel les parallèles rectilignes sont à la même distance que ceux de la projection stéréographique ordinaire.

On a ainsi (fig. 16)

$$\frac{y}{AB} = \frac{E'O}{E'B'};$$

d'où

$$y = a \tang \frac{l}{2}.$$

On en déduit

$$F'(l) = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{l}{2}};$$

(1) *Voir* 2ᵉ part., chap. VII, 2°. Disons ici que la projection prétendue nouvelle et nommée *isographique* par le docteur Mohr (séance du 6 février 1865 de la Société d'histoire naturelle et de médecine du Bas-Rhin) n'est point autre que la projection de Sanson.

donc

$$x = 2at \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Pour $l = 90^\circ$, $y = a$, $x = 0$, et pour $t = 90^\circ$ et $l = o$, $y = 0$ et $x = a\pi$. On aurait donc pour représenter un hémisphère une figure très-aplatie aux pôles. Mais on peut transformer cette projection en prenant pour y, non plus a tang $\frac{l}{2}$, mais an tang $\frac{l}{2}$, n étant un coefficient que l'on détermine par la condition que les deux axes de la représentation d'un hémisphère soient égaux.

On obtient d'abord pour x

$$x = \frac{2at}{n} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

pour $l = 90^\circ$, $y = an$, et pour $l = 0$, $t = 90^\circ$, $x = \frac{a\pi}{n}$. Il faut donc poser

$$n = \frac{\pi}{n};$$

d'où

$$n = \sqrt{\pi},$$

et les formules sont dans ce cas

$$y = at\sqrt{n}, \quad x = \frac{2at}{\sqrt{\pi}} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Ce système est plus curieux qu'utile; nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps.

8. En voici un autre qui permet de représenter les parallèles par des lignes droites et les méridiens par des droites partant toutes d'un même point qui est le pôle de la projection.

Reprenons les formules générales pour le cas où la terre est supposée sphérique,

$$y = \mathrm{F}(l); \quad x = \frac{a^2 t \cos l}{\mathrm{F}'(l)}.$$

Les équations des méridiens doivent être de la forme

$$x = (b - y)\varphi(t),$$

en appelant b l'ordonnée du point pris pour pôle, et plaçant l'origine des coordonnées à la rencontre de l'équateur et du méridien principal.

On a ainsi

$$(b-y)\varphi(t)=\frac{a^2t\cos l}{\frac{dy}{dl}}.$$

Comme $\frac{dy}{dl}$ est indépendant de t, il faut, pour que cette égalité ait lieu quelles que soient les valeurs de t et l, que $\varphi\ (t)$ soit de la forme mt, m étant une constante. On a alors

$$m(b-y)dy=a^2\cos l\,dl,$$

et en intégrant

$$m\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=C+a^2\sin l.$$

Or y s'annule avec l, donc $C=0$; et comme pour $l=90°$, $y=b$, il faut que

$$m\frac{b^2}{2}=a^2;$$

d'où

$$m=\frac{2a^2}{b^2}.$$

Les équations du système sont donc

$$2\left(by-\frac{y^2}{2}\right)=b^2\sin l,$$

$$x=2(b-y)\frac{a^2}{b^2}t.$$

Nous pouvons disposer de la constante b pour assujettir le problème à une nouvelle condition.

M. E. *Collignon* (1) l'a déterminée de manière que les méridiens extrêmes qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré. Il faut alors que pour $l=0$ et $t=\pm\frac{\pi}{2}$, on ait $x=\pm b$.

On trouve immédiatement

$$b=a\sqrt{\pi};$$

de sorte que les équations du nouveau système sont

$$x=2(a\sqrt{\pi}-y)\frac{t}{\pi},$$

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 41[e] cahier.

$$y^2 - 2a\sqrt{\pi}\,y + \pi a^2 \sin l = 0.$$

y devant toujours être plus petit que $a\sqrt{\pi}$ on ne devra prendre que la racine

$$y = a\sqrt{\pi}(1 - \sqrt{1 - \sin l}) = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right).$$

Soient (fig. 17) P le pôle, EE′ l'équateur, on portera d'abord

$$PO = OE = \frac{EE'}{2} = a\sqrt{\pi}.$$

Les méridiens se construisent immédiatement en partageant l'équateur en parties égales représentant des arcs de longitude de 5° en 5° ou de 10° en 10°.

Du point P, comme centre, avec PO pour rayon, décrivons le quadrant ADB.

Pour tracer le parallèle correspondant à une latitude représentée sur le quadrant AB par l'arc $AD = l$, il suffira de prendre le milieu F de l'arc DE complémentaire de la latitude, et de mener par ce point F, IH parallèle à BPE′ jusqu'à la rencontre H de PO. Le parallèle cherché sera N′HN parallèle à EE′.

En effet, abaissons FI perpendiculaire sur BE′ et menons IK parallèle à PO, nous aurons

$$OH = OP - IK = OP - IF\sqrt{2}.$$

Or

$$IF = OP \sin\frac{90^\circ - l}{2} = a\sqrt{\pi}\sin\frac{90^\circ - l}{2};$$

donc

$$OH = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^\circ - l}{2}\right),$$

valeur qui, substituée à y dans l'équation entre y et l, satisfait à cette équation.

Pour tracer les parallèles de 10° en 10°, il suffira donc de porter des arcs de 5° en 5° du point B au point M, milieu du quadrant BA, et de projeter ces points sur PO parallèlement à BE′; par les points de division de PO ainsi obtenus, on n'aura plus qu'à mener des parallèles à EE′ et ces parallèles seront à peu près également distants.

Pour obtenir le carré on fera le tracé seulement pour les latitudes boréales et on le répétera symétriquement au-dessous de l'équateur.

9. Nous allons maintenant considérer les systèmes de projections à surfaces équivalentes dans lesquels les parallèles sont représentés par des cercles concentriques. Nous pourrions traiter cette question comme cas particulier du problème général.

Soit C le centre commun que nous prenons pour centre des coordonnées polaires ρ et θ; remarquons de suite que ρ doit être fonction de la latitude l seulement; ainsi

$$\rho = \varphi\,(l).$$

Le petit quadrilatère formé par deux méridiens infiniment voisins et deux parallèles ayant pour rayons ρ et $\rho + d\rho$, a pour surface le produit de sa base $\rho d\theta$ par sa hauteur $d\rho$. L'égalité des surfaces de la carte et du sphéroïde donne donc

$$\rho d\rho d\theta = ardtds = \mathrm{L}dtdl;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\rho \frac{d\rho}{dl}},$$

et en intégrant

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \frac{d\rho}{dl}} + f(l).$$

Si nous convenons de compter les angles θ à partir du méridien principal qui sera représenté par une droite, on voit que θ doit s'annuler avec t et que par conséquent

$$f(l) = 0.$$

Les équations générales cherchées sont donc

$$\theta = \frac{t\mathrm{L}}{\rho \frac{d\rho}{dl}} \quad \text{et} \quad \rho = \varphi(l).$$

Les parallèles sont des cercles concentriques et les méridiens partagent les parallèles en parties égales et ont pour équation le résultat de l'élimination de l entre les deux équations précédentes.

Faisons quelques applications de ces formules.

10. Supposons d'abord la terre sphérique et prenons pour ρ la fonction la plus simple de l. Soit

$$\rho = a(c' + cl),$$

c et c' étant deux constantes. Dans ce cas la valeur de θ peut s'écrire

$$\theta = \frac{at \cos l}{c\rho}.$$

L'égalité

$$\rho\theta = \frac{at \cos l}{c}$$

montre que les degrés des parallèles sont tous réduits dans un rapport constant ; cette propriété rend très-facile le tracé de ces projections puisque les parallèles sont des cercles concentriques et que, pour avoir les méridiens, il suffit de porter sur ces cercles des longueurs qui soient aux degrés correspondants des parallèles de la sphère comme 1 est à C.

Nous pouvons construire des projections analogues pour représenter l'ellipsoïde. Pour cela donnons à ρ des variations proportionnelles à celles de l'arc s de méridien compté à partir du pôle en posant

$$\rho = ac' + cs.$$

Alors

$$\theta = \frac{tL}{\rho \frac{d\rho}{dl}} = \frac{atr \frac{ds}{dl}}{ac\rho \frac{d\rho}{dl}} = \frac{tr}{c\rho},$$

et l'on aura encore

$$\rho\theta = \frac{tr}{c}.$$

Comme il est difficile et peu exact de porter sur un arc de cercle des longueurs données, il faudra déterminer les divisions des parallèles en construisant les angles θ, ou en portant, à l'aide du compas, les longueurs des cordes qui devront sous-tendre les arcs cherchés. Ces cordes d se calculeront facilement à l'aide de la formule

$$d = 2\rho \sin \frac{\theta}{2}.$$

Lorsque le centre commun des parallèles sera trop éloigné pour que ces cercles puissent être décrits facilement, on les déterminera par points en les rapportant à deux axes rectangulaires dont l'un sera le méridien principal et l'autre une perpendiculaire quelconque, tangente par exemple au parallèle de latitude l; on aura ainsi

$$x = \rho \sin \theta \quad \text{et} \quad y = \rho_1 - \rho \cos \theta,$$

ρ étant le rayon du parallèle de latitude l_1.

11. Nous pouvons disposer de l'indétermination des constantes c et c' pour donner à la projection une nouvelle propriété.

Supposons par exemple que nous convenions de prendre le pôle pour centre commun des cercles de latitude. Il faut alors que ρ soit nul pour $l = 90°$ et par conséquent

$$c' = -\frac{\pi}{2} c.$$

Si l'on demande en outre que le rayon de l'équateur ait une longueur donnée ma, ce qui fixe l'échelle de la carte, on trouve

$$c' = m; \quad \text{donc} \quad c = -\frac{2m}{\pi},$$

et ainsi les deux formules deviennent

$$\rho = \frac{2ma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - l\right) = \frac{2ma}{\pi} z,$$

$$\theta = \frac{\pi^2 t \sin l}{4m^2 z}.$$

Or, en supposant $\frac{2m}{\pi} = 1$, ce qui est toujours possible, puisque cette constante m ne sert qu'à fixer l'échelle de la carte,

$$\rho = az \quad \text{et} \quad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

l'équation des méridiens est alors

$$\theta = \frac{at \sin \frac{\rho}{a}}{d\rho}.$$

Si nous calculons l'angle ω que fait la tangente à cette courbe avec le rayon vecteur, nous trouvons

$$\operatorname{tang} \omega = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = tz \cos z - t \sin z.$$

Cet angle est nul au pôle où $z = 0°$ et va en croissant avec z, de sorte que plus on s'éloigne du pôle et plus les méridiens s'inclinent

sur les parallèles. Cette projection serait donc tout au plus bonne pour les régions voisines du pôle. La projection n° XIX reproduit la surface entière du globe d'après Werner (1514) (1).

12. On peut aussi déterminer les constantes qui entrent dans l'expression de ρ par la condition que ρ ait une longueur déterminée pour une valeur donnée de l. Si l'on fait en sorte, par exemple, que pour $l = l_1$, ρ soit égal à la cotangente de cette latitude, le rayon de ce parallèle sera précisément égal à la génératrice du cône supposé tangent à la sphère le long de ce cercle de latitude, et l'on pourra considérer la projection comme une sorte de développement de ce cône sur lequel on aurait d'abord rectifié chaque méridien à partir du point de tangence; la valeur de chaque rayon est, dans ce cas,

$$\rho = a \operatorname{cotang} l_1 + (l_1 - l).$$

Cette projection jouit de cet avantage que les méridiens coupent le parallèle dont la latitude est l_1 à angles droits, de sorte que si l'on prend pour l_1 la latitude moyenne du pays que l'on veut représenter, on a sur ce cercle, la représentation la plus exacte qu'il soit possible d'obtenir. Nous reviendrons longuement sur cette projection, dont quelques géographes ont voulu attribuer l'idée première à Ptolémée, et qui est appelée en Allemagne *projection de Bonne*, en France projection du *Dépôt de la guerre*, et encore (par une grosse absurdité) *projection de Flamsteed modifiée* (2). Disons de suite qu'il est très-facile, dans cette projection, de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Il suffit pour cela de prendre pour rayon du parallèle moyen la tangente du cône circonscrit à l'ellipsoïde, et de porter à partir du point de tangence sur le méridien moyen, les vraies longueurs des arcs de méridien données dans la table I; on portera ensuite sur les arcs de cercle qui représentent les parallèles, les longueurs correspondantes à chacun d'eux, et données dans la même table.

Si l'on faisait $l_1 = 0$, ρ serait infini, les cercles parallèles deviendraient des droites et l'on obtiendrait la projection dont nous avons déjà parlé, vulgairement appelée *projection de Flamsteed* quoiqu'elle ait été indiquée et employée par *Sanson* en 1650 (3).

(1) *Voir* chap. VI, § 16.
(2) *Voir* chap. VI, § 14 et 2e part., chap. VII.
(3) *Voir* chap. VI, § 15, et 2e part., chap. VIII.

13. Reprenons encore pour le cas de la terre sphérique les formules

$$\rho = \varphi(l); \qquad \theta = \frac{ta^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}}.$$

Nous pouvons déterminer la fonction φ par la condition que les méridiens coupent les parallèles à angles droits. Comme les parallèles sont représentées par des cercles concentriques, les méridiens seront des droites qui devront être nécessairement également inclinées les unes sur les autres, puisque, dans toutes ces projections, les parallèles sont partagés en parties égales. Nous devons donc faire

$$\theta = \frac{t}{m},$$

si nous voulons que les angles des méridiens de la carte soient dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte

$$\frac{a^2 \cos l}{\rho \dfrac{d\rho}{dl}} = \frac{1}{m},$$

d'où nous tirons

$$\rho d\rho = ma^2 \cos l dl,$$

et, en intégrant,

$$\frac{\rho^2}{2} = C - ma^2 \sin l.$$

Nous mettons le signe — devant le terme en $\sin l$, parce que, ρ croissant quand l décroît, $d\rho$ et dl sont de signes contraires ; il faut donc rétablir les signes dont nous avons fait abstraction dans les formules générales.

ρ devant être nul pour $l = 90$, la constante C doit être prise égale à ma^2, et par conséquent

$$\frac{\rho^2}{2} = ma^2(1 - \sin l).$$

Remplaçons l par $90° - z$, nous pourrons écrire

$$\rho^2 = 4am^2 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Les équations de ce système de projection sont donc

$$\rho = 2\sqrt{m}\,a \sin\frac{z}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{t}{m};$$

$2a \sin\frac{z}{2}$ représente la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de latitude l; la valeur de ρ est donc bien facile à construire; pour obtenir les rayons des parallèles, il suffira de tracer une circonférence d'un rayon égal à $a\sqrt{m}$, et de porter à partir d'un diamètre les différentes latitudes; les distances rectilignes du pôle P de ce diamètre aux points de division, c'est-à-dire les cordes des arcs complémentaires des premiers, seront les rayons cherchés. Le rayon de l'équateur sera égal à $a\sqrt{2m}$.

On peut donner au coefficient m la valeur que l'on veut.

Pour des pays isolés tels que l'Europe, m peut être déterminé de manière que, sur la carte, le degré de latitude moyenne l_1 conserve son véritable rapport avec le degré de longitude. Il faut alors que

$$\rho\theta = \rho\frac{t}{m} = at\sin z_1.$$

Or

$$\rho = 2a\sqrt{m}\sin\frac{z_1}{2};$$

donc

$$\frac{2a}{\sqrt{m}}\sin\frac{z_1}{2} = a\sin z;$$

d'où

$$\sqrt{m} = \frac{2\sin\frac{z_1}{2}}{\sin z_1} = \frac{1}{\cos\frac{z_1}{2}},$$

et par conséquent

$$m = \frac{1}{\cos^2\frac{z_1}{2}} = \frac{2}{1+\cos z_1}.$$

Si l'on prend par exemple pour l'Europe $z_1 = 38°\,26'$, on trouve $\cos z_1 = 0{,}78327$; on peut donc prendre, si l'échelle est petite,

$$m = \tfrac{10}{9},$$

et c'est dans cette proportion que les degrés de longitude doivent être réduits. On a alors

$$\rho = \frac{2}{3} a \sqrt{10} \sin \frac{z}{2} = a . 2,108 \sin \frac{z}{2}.$$

La projection n° XIV a été tracée en prenant $z_1 = 45°$ d'où résulte pour m la valeur 1,171. L'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 307° 25′ environ.

Nous donnerons à ce système le nom de *projection isosphérique sténotère* (1) *de Lambert* (2) pour le distinguer du suivant qui conserve les angles des méridiens, et que nous pourrions qualifier de *isomère* (3).

14. Ce second système est ainsi défini par l'expression

$$m = 1,$$

et a pour formules

$$\theta = t, \quad \rho = 2a \sin \frac{z}{2}.$$

On voit que dans ce cas le rayon ρ de chaque parallèle est égal à la corde de l'arc de méridien compris sur la sphère entre le pôle et le cercle de latitude correspondant.

Lambert est arrivé à ces systèmes isosphériques en traitant directement la question de la conservation des surfaces sous la condition de représenter les méridiens par des droites se coupant au pôle et les parallèles par des cercles ayant ce pôle pour centre.

En posant PM $= \rho$, MN $= d\rho$, on a

$$\mathrm{M}\mu = \rho dt$$
$$\text{surf. MN}\mu\nu = \rho dt d\rho = a^2 \sin z dz dt$$
$$\rho d\rho = a^2 \sin z dz = - a^2 d \cos z.$$

Donc, en se donnant la condition que ρ s'annule avec z,

$$\frac{1}{2}\rho^2 = a^2(1 - \cos z) = 2a^2 \sin^2 \frac{z}{2},$$
$$\rho = 2a \sin \frac{z}{2}.$$

Lambert eut encore le mérite de remarquer que cette projection, de même que toutes celles où les méridiens sont, en prenant le pôle

(1) Στενότερος, plus étroit.
(2) *Entwerfung der Charten*, sect. IX.
(3) Ἰσομοιρος, également partagé.

pour centre, des droites régulièrement espacées autour de ce point et les parallèles des cercles concentriques, peut s'appliquer en un point quelconque de la sphère pris pour centre; il suffit pour cela de supposer les méridiens remplacés par des cercles verticaux et les parallèles par des cercles (nommés *almicantarats*) ayant tous ce point pour centre et dont les rayons sur la projection varieront d'après la même loi que les rayons des parallèles de la projection polaire. D'après cette remarque il suffit, pour représenter une portion quelconque de la surface sphérique sans en altérer les aires, de prendre arbitrairement un point de la sphère pour centre du tracé, de reporter ce point sur le papier, puis de placer chaque point du contour dans l'azimut du point correspondant sur la sphère par rapport au centre adopté, à une distance de ce centre égale à la corde du grand cercle mené de l'un à l'autre de ces deux points.

Pour déterminer chaque point de la carte par sa latitude et sa longitude, il suffit d'exprimer l'azimut et le rayon vecteur en fonction de ces coordonnées. Ce calcul de transformation de coordonnées se fait très-facilement à l'aide du triangle sphérique ayant pour sommets le pôle, le point central et le point donné par sa latitude et sa longitude, et que l'on veut placer sur la carte; dans ce triangle on connaît, en effet, deux côtés et l'angle compris; il est facile de trouver l'angle au point central et le côté qui joint ce point à celui que l'on veut placer.

Nous reviendrons sur ce calcul lorsque nous parlerons des projections zénitales, c'est-à-dire qui peuvent avoir pour centre un point donné quelconque.

Lambert n'a considéré, dans sa projection isosphérique, que le cas où le point central est pris sur l'équateur, de sorte que la projection d'un hémisphère peut être regardée comme faite sur le plan d'un méridien; mais le principe de transformation est le même lorsqu'on projette tout ou partie de la demi-surface sphérique sur l'horizon d'un lieu quelconque. Tout le mérite de cette invention revient à Lambert et non à *Lorgna*, qui, quoique n'ayant parlé que dix-sept ans plus tard de la projection polaire seulement, a su attacher son nom à ce système (1).

Nous reviendrons plus tard (2) sur cette projection, que M. E. *Col-*

(1) Anton.-Mario Lorgna, *Principi di geografia astronomico-geometrica*, Vérone, 1789, in-folio, chap. IX, à XI, p. 68 à 94.
(2) *Voir* 2e part., ch. IX.

lignon (1) vient de traiter d'une façon très-remarquable dans un mémoire présenté à l'Académie, et nous parlerons alors de l'application de ce système aux cartes particulières et de la manière de tenir compte de l'aplatissement de la terre. Disons de suite que la projection isosphérique zénitale de Lambert est incontestablement la meilleure de toutes celles qui conservent les surfaces, car :

1° l'altération des angles et des distances y est nulle au centre de la carte, point que l'on peut choisir arbitrairement;

2° ces erreurs sont égales à des distances égales du centre;

3° en chaque point il existe une infinité de couples de droites formant des angles non altérés, et deux éléments de longueur non altérés;

4° on peut, par des opérations graphiques très-simples, déterminer rigoureusement la mesure d'un angle représenté sur la carte, et approximativement la mesure de la longueur d'une ligne donnée.

Les projections n°ˢ XX et XXI ont été dressées dans ce système et à l'aide des tables du chapitre IX (2° partie).

15. M. Collignon a proposé de construire des mappemondes mixtes en trois parties, les deux zones polaires à une base comprises entre les pôles et les parallèles de 30° de latitude étant projetées dans le système isosphérique de Lambert, et la zone équatoriale intermédiaire dans le système isocylindrique dont nous avons parlé au § 2. Comme la corde d'un arc de 60° est égale au rayon, les rayons des cercles qui limitent les deux zones polaires seront égaux au rayon du cylindre circonscrit, de plus les altérations des longueurs seront identiques sur ces trois cartes dans le sens des lignes qui en forment les contours extrêmes, et identiques aussi dans le sens perpendiculaire à ces contours; c'est ce que nous démontrerons quand nous étudierons chacun de ces systèmes en particulier. Une mappemonde ainsi construite permet d'évaluer des distances avec une erreur au plus égale au $\frac{15}{100}$ de leur valeur et de tracer au rapporteur les directions avec une déviation maximum de 8° 12′, résultats qui doivent être considérés comme très-suffisamment exacts quand on a à représenter la totalité de la surface terrestre sous la condition de conserver les aires.

16. La projection isosphérique sténotère de Lambert peut être considérée comme une projection conique toutes les fois que *m* est

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 41° cahier.

plus grand que l'unité, car il est alors toujours possible de calculer l'angle au sommet 2α du cône obtenu en enroulant cette projection. En égalant la circonférence de la base à l'arc-limite de la projection, on a en effet (fig. 18)

$$2\pi OA = R\theta \quad \text{ou} \quad \theta R = 2\pi R \sin\alpha;$$

d'où

$$\theta = 2\pi \sin\alpha.$$

Or nous avons posé $\theta = \frac{2\pi}{m}$, donc

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha,$$

formule qui permet de calculer l'une des quantités m ou α quand l'autre est connue. Si l'on suppose le cône tangent à la sphère, l'angle α est égal à la latitude de parallèle de contact.

Au lieu de prendre un cône tangent à la sphère, on peut en considérer un sécant en s'imposant la condition que sur deux parallèles donnés les degrés de longitude conservent leur véritable rapport avec ceux de latitude, et par suite que l'altération des angles soit nulle sur ces deux parallèles.

La projection qui en résulte, imaginée par le docteur *Albert* de Lünebourg en 1805 (1), est donc le développement d'un tronc de cône ayant pour axe la ligne des pôles et traversant la sphère suivant les deux cercles de latitudes l_1 et l_2 que l'on veut conserver dans la représentation.

La surface de la zone limitée par ces deux parallèles (fig. 19) est exprimée par

$$S = 2\pi a^2(\sin l_2 - \sin l_1) = 4\pi a^2 \cos\frac{l_1 + l_2}{2} \sin\frac{l_2 - l_1}{2};$$

la surface correspondante du tronc de cône par

$$S' = \pi a D(\cos l_2 + \cos l_1) = 2\pi a D \cos\frac{l_2 + l_1}{2} \cos\frac{l_2 - l_1}{2},$$

en appelant D la distance AB, c'est-à-dire la différence des rayons

(1) *Beschreibung einer neuen Kegelprojection, von H. C. Albers*, mémoire inséré dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, novembre 1805, p. 450 à 459.

des deux parallèles considérés sur la projection. De l'égalité des surfaces on tire

$$D = 2a \tang \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Le rayon ρ_2 du parallèle Al_2 s'obtiendra par le rapport

$$\frac{BA}{HB} = \frac{OA}{Al_2}, \quad \text{d'où} \quad \rho_2 = \frac{D \cos l_2}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{a \cos l_2}{\sin \frac{l_2 + l_1}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

De même le second rayon ρ_1 sera donné par l'égalité

$$\rho_1 = \rho_2 + D = \frac{a \cos l_1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Quant à l'écartement des méridiens qui sont les génératrices du cône développé, on l'obtiendra en égalant les deux expressions de la longueur d'un des deux parallèles B ou A sur le cône et sur la sphère, ce qui donnera

$$\theta = \frac{ta \cos l_1}{\rho_1} = \frac{t}{k}$$

en posant

$$k = \frac{\rho_1}{a \cos l_1} = \frac{1}{\sin \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_2 - l_1}{2}}.$$

Ainsi les angles des méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à k.

Cherchons maintenant l'expression du rayon d'un parallèle quelconque de latitude l.

La surface infiniment petite comprise entre ce parallèle, le voisin et les deux méridiens consécutifs a évidemment pour expression sur le cône $\theta\rho d\rho$, et sur la sphère $ta^2 \cos l dl$; en exprimant que ces deux surfaces sont égales on a donc

$$\theta \rho d\rho = - ta^2 \cos l dl;$$

nous mettons le signe — parce que $d\rho$ et dl sont des accroissements de signes contraires. Remplaçons θ par $\frac{t}{k}$ et intégrons, nous aurons

$$\rho^2 = -2a^2 k \sin l + C.$$

Pour $l = l_1$ on a par conséquent

$$\rho_1^2 = -2a^2k \sin l_1 + C;$$

donc

$$\rho^2 = 2a^2k(\sin l_1 - \sin l) + \rho_1^2.$$

Telle est l'expression qui permettra de calculer le rayon d'un parallèle quelconque.

Si l'on veut prolonger le développement au-dessus et au-dessous des deux parallèles l_1 et l_2, le pôle sera représenté par un arc de cercle dont le rayon sera

$$\rho^2_{90} = \rho_1^2 - 2a^2k(1 - \sin l_1),$$

et l'équateur aura pour rayon

$$\rho^2_0 = 2a^2k \sin l_1 + \rho_1^2.$$

Dans cette projection la déformation n'est pas très-considérable lorsqu'on ne s'éloigne pas trop des deux parallèles qui conservent leur grandeur exacte, et par conséquent lorsque la différence des latitudes de ces deux parallèles est elle-même peu considérable; dans les 5 degrés de latitude voisins de chacun d'eux, l'erreur sur les degrés de longitude ne s'élève pas à plus de $\frac{1}{1000}$. Les distances se mesurent directement avec une approximation souvent suffisante, à l'aide d'une échelle divisée en parties égales, tant que la carte ne comprend pas plus de 20 degrés de latitude. Les distances, dans la zone centrale, sont augmentées du nord au sud et diminuées de l'est à l'ouest, et l'erreur la plus grande est sur les parallèles du milieu; dans les zones extrêmes, au contraire, les distances du nord au sud sont diminuées et celles de l'est à l'ouest augmentées, et cela d'autant plus que les deux parallèles donnés sont plus éloignés. Les erreurs sont indépendantes de l'étendue en longitude, ce qui rend la projection d'Albers très-convenable pour un pays tel que la Russie, qui a une très-grande étendue en longitude. Enfin les erreurs d'angles et de distances diminuent à mesure que la différence des latitudes des parallèles extrêmes décroît, et pour une zone ne dépassant pas 10° ces erreurs peuvent être négligées.

Le système d'Albers fut adopté pour la carte générale de l'Europe construite à Nuremberg en 1817 par *Reichard.*

La projection n° XV donne le développement de l'hémisphère nord avec la conservation des parallèles de 30 degrés et de 60 de latitude.

17. Si l'on veut une projection où les méridiens et les parallèles soient des droites se coupant à angles droits et où les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec les degrés de latitude, on imaginera un cylindre non plus tangent à la sphère comme dans la projection isocylindrique de Lambert, mais construit sur le parallèle donné, en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère; de cette manière l'étendue en longitude se trouvera exacte vers le milieu, mais l'erreur sera partagée entre les deux extrémités.

Si nous appelons h la distance d'un parallèle de latitude $l = l_0 + \delta$ au parallèle de latitude l_0 qui est supposé servir de base au cylindre et se développer en vraie longueur, on aura, en égalant les surfaces correspondantes de la sphère et du cylindre,

$$2\pi a^2[\sin(l_0 + \delta) - \sin l_0] = 2\pi a h \cos l_0,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{2a \sin\frac{\delta}{2} \cos\left(l_0 + \frac{\delta}{2}\right)}{\cos l_0}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les projections cylindriques et nous montrerons que le cylindre peut être pris non-seulement perpendiculaire à l'équateur, mais encore oblique et tangent le long d'un grand cercle quelconque considéré comme l'équateur artificiel d'une zone étroite et oblique que l'on aurait à représenter.

La projection n° XII donne le développement du cylindre sécant le long du parallèle de 45°.

18. Il nous reste à parler d'une autre projection imaginée en 1805 par le savant professeur *C.-B. Mollweide*, de Halle (1), et dont on a fait depuis 1857 de nombreuses applications sous le nom de *projection homalographique de M. Babinet*. Le professeur *Schmidt*, de Giessen, en 1803, et bien avant lui le P. *Fournier* (2) en 1643, avaient proposé « pour tracer une carte la mieux proportionnée « qu'on puisse, » sur le plan d'un méridien, de représenter les mé-

(1) MOLLWEIDE, *Ueber die vom Prof.* SCHMIDT *in Giessen in der zweyten Abtheilung seines Handbuchs der naturlehre S. 595 Angegebene « Projection der Halbkugelfläche » (hierzu ein Kupfer, eine geometrische Figur enthaltend)* dans la *Monatliche Correspondenz* de ZACH, cahier d'août 1805, p. 152 à 163.

(2) *Hydrographie, composée par le Père* G. FOURNIER, *de la compagnie de Jésus*. Paris, 1643, 2e édit., 1667 in-fol.; liv. XIV, Des Cartes, p. 524.

ridiens équidistants par des ellipses équidistantes; quant aux parallèles, le P. Fournier les traçait soit en arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen (1), soit en lignes droites menées par les divisions homologues des méridiens extrêmes. Le professeur Schmidt recommandait de diviser les méridiens elliptiques en parties égales avec le compas, pour déterminer chaque parallèle par points. Si l'on obtenait ainsi l'égalité des zones elliptiques et des fuseaux correspondants de la sphère, il n'en était plus de même pour les zones limitées par des parallèles, et ainsi l'égalité des surfaces n'était pas conservée; ce fut Mollweide qui eut le mérite de trouver la loi de l'espacement des droites destinées à représenter les parallèles de manière à satisfaire à cette condition.

Si l'on décrit (fig. 20) un cercle ABDE avec un rayon égal à $\sqrt{2}$, la surface de ce cercle sera égale à la moitié de la surface de la sphère; si ensuite on partage le diamètre AC en parties égales AI, IF, FG, GC, et que l'on trace des demi-ellipses telles que BFE ayant pour demi-axes BC et FC, en vertu de ce théorème que l'aire d'une ellipse est à l'aire décrite sur son grand axe dans le rapport du petit axe au grand axe, la surface du cercle ABDE sera partagée en autant de parties égales que le rayon AC, et chacune d'elles sera égale à la surface du fuseau correspondant de la sphère. Si l'on mène une corde HK on voit aussi que chaque segment limité par deux arcs elliptiques et par une partie de la corde HK, est au segment de cercle HBK dans le rapport de la partie MN de corde renfermée entre les arcs elliptiques, à la corde entière, et par conséquent dans le rapport de IF à AD, ce qui montre bien la possibilité de représenter les parallèles de la projection par des droites parallèles à l'équateur et qui seront, par conséquent, divisées comme lui en parties égales.

Il reste maintenant à rendre les parties du cercle ABDE comprises entre les cordes parallèles et le diamètre AD égales aux zones correspondantes de l'hémisphère.

Soit l'angle

$$\text{ACH} = \varphi; \quad \text{HL} = \sqrt{2}\cos\varphi; \quad \text{LC} = \sqrt{2}\sin\varphi.$$

Donc

$$\text{aire AHKD} = \text{triangle HCK} + 2\,\text{secteurs AHC} = 2\sin\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}\varphi\sqrt{2} = \sin 2\varphi + 2\varphi.$$

(1) *Voir* 2e part., chap. XIV, 2°, Projection globulaire.

Soit μ la latitude du parallèle HK de la sphère; la zone sphérique comprise entre l'équateur et ce parallèle est égale à $\pi \sin \mu$; on aura donc pour déterminer φ l'équation

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin \mu.$$

Mollweide est encore parvenu à la même équation en partant de l'équation différentielle qui exprime la condition de conservation des surfaces et faisant intervenir l'hypothèse des méridiens elliptiques.

Nous avons trouvé (§ 1) que, dans l'hypothèse de la terre sphérique, l'équation était

$$\frac{dy}{dl}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dl} = \cos l.$$

Étudions la variation des coordonnées le long d'un méridien elliptique. L'équation des méridiens ayant pour axes $\sqrt{2}$ et $\frac{2t\sqrt{2}}{\pi}$ est

$$\frac{\pi^2 x^2}{8t^2} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad \text{d'où} \quad x^2 = (2 - y^2)\frac{4t^2}{\pi^2}.$$

En considérant ces deux équations simultanément, on obtient immédiatement, pour déterminer y, l'équation

$$\frac{2}{\pi}\frac{dy}{dl}\sqrt{2 - y^2} = \cos l,$$

dans laquelle y n'est différentié que par rapport à l. En intégrant on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l + \text{A}.$$

Comme, en vertu des conditions du problème, y et l disparaissent simultanément, il faut aussi que $\text{A} = 0$, et l'on a

$$y\sqrt{2 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} = \pi \sin l,$$

équation dans laquelle on devra évidemment prendre le plus petit de tous les arcs ayant pour sinus $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Comme y ne dépend que de l, on en conclut que tous les points qui ont la même latitude sont situés sur une corde parallèle à l'axe des x.

Si l'on pose comme tout à l'heure

$$y = \sqrt{2} \sin \varphi,$$

l'équation se transforme en

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \pi \sin l$$

que nous avons déjà trouvée.

Cette équation est insoluble si l'on y regarde φ comme l'inconnue, mais on peut tourner la difficulté en la résolvant par rapport à l, et attribuant à φ des valeurs arbitraires ; il faudra pour cela la mettre sous la forme

$$\pi \sin l = 2\varphi \frac{180^\circ}{\pi} + \sin' 2\varphi.$$

On pourra ainsi construire une table renfermant en regard des valeurs de φ les valeurs de l correspondantes, et s'en servir de la même manière que d'une table de logarithmes pour trouver par interpolation les valeurs de φ qui correspondent à une valeur quelconque de l.

Mollweide a dressé ainsi une table qui permet de construire les parallèles de 10° en 10°, et M. Jules Bourdin a fait les mêmes calculs de 30′ en 30′. C'est cette dernière table que nous donnons plus loin (1). Elle nous a servi à construire le canevas de la projection n° XVI.

Nous ne nous sommes étendu si longuement sur les deux méthodes données par Mollweide que pour montrer qu'il est bien l'auteur de ce système appliqué seulement cinquante ans plus tard sous le patronage d'un nom plus populaire. Disons encore que le professeur allemand proposait d'adopter cette projection pour représenter, comme nous l'avons fait dans le planisphère n° XVI, la surface entière de la terre dans une ellipse dont l'un des axes est double de l'autre.

Mentionnons encore, avant de terminer le chapitre des projections équivalentes, le canevas indiqué par M. le capitaine Foucaut (2) comme se rapprochant du canevas homalographique de même dimension

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi + 2)}}\, a(l + \sin l),$$

$$x = \sqrt{\frac{2(\pi + 2)}{\pi}}\, at \frac{\cos l}{1 + \cos l}.$$

(1) *Voir* 2e part., ch. VIII.

(2) Voir la note de la page 81.

CHAPITRE IV.

PROJECTIONS PERSPECTIVES.

1. Les projections perspectives représentent la surface d'une sphère comme la verrait un spectateur placé en un point déterminé de l'espace ; la représentation de chaque point de la surface s'obtient par l'intersection du rayon visuel mené de l'œil à ce point, et d'un plan appelé *tableau*, perpendiculaire au rayon qui joint l'œil au centre ; une ligne quelconque tracée sur la surface a de même pour projection perspective l'intersection du plan du tableau avec la surface conique dont cette ligne est la directrice et le point de vue le sommet.

La distance du tableau au centre du globe ne fixant que l'échelle de la carte, peut rester arbitraire; elle se détermine le plus souvent par de simples considérations de tracé graphique; mais de la position du point de vue dépendent la forme et les propriétés de la projection, de sorte que cette position varie suivant le but qu'on se propose.

Remarquons d'abord que, quand le point de vue est situé dans l'intérieur de la sphère (ce qui est le cas d'un observateur regardant la voûte céleste), c'est la surface intérieure de la sphère que l'on représente. Il en est encore de même lorsque le point de vue est sur cette surface ou à une petite distance; car, si l'on voulait représenter l'hémisphère antérieur, le rapprochement des rayons visuels dans le voisinage des tangentes extrêmes apporterait beaucoup de confusion dans le dessin et ne permettrait pas de représenter un hémisphère entier sans surcharger les bords de la carte. Mais dans le cas où l'œil est supposé à une distance du globe assez grande pour que les rayons visuels puissent être considérés comme parallèles, le même inconvénient n'existant plus, c'est la surface antérieure, celle que l'on voit réellement, qui doit être représentée.

L'une des principales propriétés de toute projection perspective, c'est que tout grand cercle passant par l'axe optique a pour projec-

tion un diamètre du cercle qui limite le tableau; les autres cercles ont pour perspectives des courbes du second degré, puisque ce sont les sections planes de cônes ayant tous des cercles pour directrices.

Nous allons nous occuper de tracer le canevas, c'est-à-dire les méridiens et les parallèles d'une projection perspective. Cherchons d'abord les formules qui permettent de calculer les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude.

2. Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que le plan de projection coïncide avec l'un des grands cercles de la sphère; dans le cas où il n'en serait pas ainsi, il suffirait, pour passer de ce plan fictif au plan réel auquel il est parallèle, de réduire toutes les lignes de la figure dans le rapport de la distance du point de vue au centre de la sphère, à la distance du point de vue au plan de projection. Enfin nous supposerons dans tout ce qui va suivre la terre sphérique, nous réservant d'indiquer, dans chaque système en particulier, la correction à faire pour tenir compte de l'aplatissement.

Le grand cercle de la sphère pris pour plan du tableau pourra être considéré comme l'horizon d'un lieu dont la latitude λ serait le complément de son inclinaison sur l'équateur ou de la distance du pôle à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue.

Prenons pour plan de la figure celui du méridien PzH'z'H' qui contient le point de vue V et est, par conséquent, perpendiculaire au plan du tableau HTH'; nous supposerons les longitudes t comptées à partir de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences des longitudes de ce méridien et de tous ceux que l'on aura à construire sur la carte.

Prenons dans le plan du tableau deux axes de coordonnées, dont l'un sera l'intersection du méridien principal et du grand cercle de projection et dont l'autre passant par le centre C sera perpendiculaire au premier (fig. 21).

Appelons D la distance donnée CV du centre de la sphère au point de vue V, a le rayon de la sphère, x l'abscisse Cn, y l'ordonnée nm, δ la distance angulaire Mz, $90° - \lambda$ l'angle ZCP qui définit la position du tableau, $90° - l$ la distance polaire du point considéré M, t sa longitude ZPM, φ l'angle au zénith, MZP. Menons dans le plan ZCVM, MK parallèle à Cm et, par conséquent, perpendiculaire à CZ; les deux triangles semblables MKV, mCV donneront

$$\frac{Cm}{MK} = \frac{CV}{KV}.$$

Or

$$MK = a \sin\delta; \quad KV = D + a\cos\delta,$$

donc

$$Cm = \frac{Da \sin\delta}{D + a\cos\delta}.$$

Le triangle Cmn donne

$$x = -Cm\cos\varphi; \quad y = Cm\sin\varphi$$

Donc

$$x = -\frac{Da\sin\delta\cos\varphi}{D + a\cos\delta}; \quad y = \frac{Da\sin\delta\sin\varphi}{D + a\cos\delta}.$$

Les coordonnées du point m se trouvent ainsi exprimées en fonction de φ et de δ; cherchons donc à exprimer φ et δ en fonction de la latitude l et de la longitude t.

Dans le triangle sphérique PzM, on a

$$\sin\delta\sin\varphi = \cos l \sin t$$

$$\sin\delta\cos\varphi = \frac{\sin l - \sin\lambda\cos\delta}{\cos\lambda}$$

$$\cos\delta = \sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l\cos t,$$

d'où

$$\sin\delta\cos\varphi = \cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l\cos t.$$

Substituons dans les valeurs de x et y; nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Da(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \\ y &= \frac{Da\cos l\sin t}{D + a(\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l)} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Telles sont les deux équations qui déterminent les coordonnées de la projection d'un point de la sphère défini par sa latitude et sa longitude.

Ces formules générales se modifient dans deux cas particuliers.

Si l'on suppose l'œil placé sur le prolongement de l'axe de la terre, le plan de projection coïncide avec l'équateur et la projection est dite *équatoriale* ou *polaire*. Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 90°$ dans les formules (1) :

$$x = \frac{Da\cos l\cos t}{D + a\sin\lambda\sin l}; \quad y = \frac{Da\cos l\sin t}{D + a\sin\lambda\sin l}.$$

Le pôle de l'hémisphère opposé au point de vue occupe alors le centre de la projection.

Si l'on suppose l'œil placé dans le plan de l'équateur, le plan de projection coïncide avec un méridien et la projection est dite *méridienne.* Nous obtiendrons alors les valeurs de x et de y en faisant $\lambda = 0$ dans les formules (I),

$$x = -\frac{\mathrm{D}a \sin l}{\mathrm{D} + a\cos l \cos t}; \qquad y = \frac{\mathrm{D}a \cos l \sin t}{\mathrm{D} + a\cos l \cos t}.$$

3. Revenons aux formules générales de la projection horizontale.

Pour obtenir autant de points que l'on voudra de l'équateur, on fera $l = 0$, et dans les formules résultantes

$$x = \frac{\mathrm{D}\sin\lambda\cos t}{\mathrm{D} + a\cos\lambda\cos t}, \qquad y = \frac{\mathrm{D}\sin t}{\mathrm{D} + a\cos\lambda\cos t},$$

on donnera successivement à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°, etc.....

On obtiendra de même les intersections d'un parallèle de latitude donnée l avec les méridiens en donnant à t les valeurs 0°, 5°, 10°, 15°....., dans les formules générales où l conservera la valeur donnée. En opérant de même pour autant de valeurs de l que l'on voudra, puis réunissant par des courbes continues les points de même latitude, puis ceux de même longitude, on obtiendra les parallèles et les méridiens de la projection.

Comme ces courbes sont toutes du second degré, il est souvent plus commode et plus rapide de les tracer directement. Cherchons leurs équations.

Pour obtenir l'équation des méridiens, éliminons la latitude l entre les équations (I); cette élimination nous donnera l'équation d'une ellipse que nous pourrons construire.

Nous avons d'abord

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\sin\lambda\cos t - \cos\lambda \operatorname{tang} l},$$

d'où

$$\operatorname{tang} l = \frac{y\sin\lambda\cos t - x\sin t}{y\cos\lambda};$$

substituons à tang l cette valeur dans l'expression de y, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} &y^2(\mathrm{D}^2 - \mathrm{D}^2\sin^2\lambda.\ \sin^2 t - a^2\cos^2 t) + xy(a^2 - \mathrm{D}^2)\sin\lambda\sin 2t \\ &+ x^2(\mathrm{D}^2 - a^2\sin^2\lambda)\sin^2 t + \mathrm{D}a^2 y\cos\lambda\sin 2t - a^2\mathrm{D}x\sin 2\lambda\sin^2 t \\ &\qquad - a^2\mathrm{D}^2\cos^2\lambda\sin^2 t = 0 \end{aligned}\right\} \text{(II).}$$

Telle est l'équation la plus générale des méridiens. Il est facile de déterminer les deux axes 2A et 2B de cette ellipse ainsi que les coordonnées α et β du centre, respectivement parallèles à l'axe des x et des y. On obtient

$$A = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)}}; \qquad B = \frac{aD^2 \cos\lambda \sin t}{D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)},$$

$$\alpha = \frac{Da^2 \sin 2\lambda \sin^2 t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]}; \qquad \beta = \frac{-Da^2 \cos\lambda \sin 2t}{2[D^2 - a^2(1 - \cos^2\lambda \sin^2 t)]},$$

et l'on trouve enfin, pour déterminer l'angle ω que fait le grand axe 2A avec l'axe des x, la formule

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{\sin\lambda \sin 2t}{\cos^2 t - \sin^2\lambda \sin^2 t}$$

ou

$$\operatorname{tang}\omega = \sin\lambda \operatorname{tang} t.$$

Si l'on veut obtenir la courbe qui passe par les centres de toutes ces ellipses, il faut éliminer t entre les valeurs de α et de β :

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\sin\lambda \operatorname{tang} t, \text{ d'où } \operatorname{tang} t = -\frac{\alpha}{\beta \sin\lambda}$$

ou

$$\sin^2 t = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2\lambda}.$$

En substituant à $\sin^2 t$ cette valeur dans l'expression de α, on obtiendra

$$\beta^2(D^2 - a^2)\sin^2\lambda + \alpha^2(D^2 - a^2 \sin^2\lambda) - \alpha D a^2 \sin\lambda \cos\lambda = 0,$$

équation qui représente généralement une ellipse dont α et β sont les coordonnées rectangulaires et qui passe par le centre C de ces coordonnées.

Les coordonnées (α) et (β) du centre de cette courbe sont

$$(\alpha) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2 \sin^2\lambda)}; \qquad (\beta) = 0;$$

ses demi-axes

$$(A) = \frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{2(D^2 - a^2 \sin^2\lambda)}; \qquad (B) = \frac{a^2 D \cos\lambda}{2\sqrt{(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 \sin^2\lambda)}}.$$

Le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle (ω) est donc nul.

Cherchons maintenant l'équation des parallèles de la projection ; il suffira pour l'obtenir d'éliminer la longitude t entre les équations (I). Voici la suite des calculs :

$$\cos t = \frac{\mathrm{D}x + a\mathrm{D}\cos\lambda\sin l + ax\sin\lambda\sin l}{a\mathrm{D}\sin\lambda\cos l - ax\cos\lambda\cos l};$$

$$\frac{y}{x}\sin\lambda\cos l\cos t - \frac{y}{x}\cos\lambda\sin l = \cos l\sin t;$$

en élevant au carré

$$(y^2\sin^2\lambda\cos^2 l + x^2\cos^2 l)\cos^2 t - 2y^2\cos\lambda\sin\lambda\sin l\cos l\cos t$$
$$- x^2\cos^2 l + y^2\cos^2\lambda\sin^2 l = 0.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\cos t$, on obtient, après réduction,

$$\left.\begin{array}{l} y^2(\mathrm{D}\sin\lambda + a\sin l)^2 + x^2[\mathrm{D}^2 + 2a\mathrm{D}\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)] \\ + 2a\mathrm{D}x(\mathrm{D}\cos\lambda\sin l + a\sin\lambda\cos\lambda) - a^2\mathrm{D}^2\sin(\lambda - l)\sin(\lambda + l) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(III)}.$$

Telle est l'équation la plus générale des parallèles : elle représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le terme

$$\mathrm{D}^2 + 2a\mathrm{D}\sin\lambda\sin l - a^2\cos(\lambda - l)\cos(\lambda + l)$$

est plus grand que zéro, plus petit que zéro, ou nul.

En appelant A', B' les demi-axes, α', β' les coordonnées du centre, on obtient

$$\mathrm{A}' = \frac{a\mathrm{D}\cos l(\mathrm{D}\sin\lambda + a\sin l)}{\mathrm{D}^2 + 2a\mathrm{D}\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda};$$

$$\mathrm{B}' = \frac{a\mathrm{D}\cos l}{\sqrt{\mathrm{D}^2 + 2a\mathrm{D}\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos^2\lambda}};$$

$$\alpha' = -\frac{a\mathrm{D}\cos\lambda(\mathrm{D}\sin l + a\sin\lambda)}{\mathrm{D}^2 + 2a\mathrm{D}\sin\lambda\sin l + a^2\sin^2 l - a^2\cos\lambda};$$

$$\beta' = 0.$$

Comme le grand axe coïncide avec l'axe des x, l'angle ω' est nul ; ainsi les centres de toutes les projections des parallèles sont sur l'axe des x.

On obtiendra l'équation de la projection de l'équateur en faisant $l = 0$ dans l'équation (III), ce qui donnera

$$\mathrm{D}^2y^2\sin^2\lambda + x^2(\mathrm{D}^2 - a^2\cos^2\lambda) + 2a^2\mathrm{D}x\sin\lambda\cos\lambda - a^2\mathrm{D}^4\sin^2\lambda = 0,$$

équation d'une ellipse dont les axes 2A'', 2B'' seront donnés par les formules

$$A'' = \frac{aD^2 \sin\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad B'' = \frac{aD}{\sqrt{D^2 - a^2\cos^2\lambda}},$$

et dont les coordonnées du centre seront

$$\alpha'' = -\frac{a^2 D \sin\lambda \cos\lambda}{D^2 - a^2\cos^2\lambda}; \qquad \beta'' = 0,$$

Pour avoir la distance de la projection p du pôle au centre de la carte, il suffira de faire $l = \pm 90°$ dans l'expression de α' et l'on obtiendra pour les deux pôles

$$p = -\frac{aD\cos\lambda}{D + a\sin\lambda}; \qquad p' = \frac{aD\cos\lambda}{D - a\sin\lambda}.$$

Les projections de ces deux points seront évidemment sur l'axe des x.

4. Dans le cas où l'équateur est pris pour plan de projection, les parallèles de la carte sont des cercles dont le rayon est égal à

$$\rho_p = \frac{Da\cos l}{D + a\sin l}.$$

On obtient cette formule en faisant $\lambda = 90°$ dans l'expression de A'.

Les méridiens sont des droites passant toutes par la projection du pôle et faisant entre elles les mêmes angles que les méridiens de la sphère ; c'est ce que montre l'équation (II) qui, dans l'hypothèse de $\lambda = 90$, devient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t.$$

La projection équatoriale est donc très-facile à construire sans le secours des coordonnées. Remarquons que dans ce cas, lorsque $D > a$, c'est-à-dire lorsque le point de vue est en dehors de la sphère, la projection peut être étendue au delà de l'équateur jusqu'au parallèle passant par le point où la tangente menée du point de vue touche le méridien PEP'E' ; ce parallèle a une latitude l' donnée par la relation

$$\operatorname{tang} l' = \frac{a}{\sqrt{D^2 - a^2}},$$

et sa projection a pour rayon

$$\rho'_p = \frac{Da \cos l'}{D - a \sin l'}.$$

La figure 22 montre de suite les constructions à effectuer dans le cas de la projection équatoriale ou polaire. Sur le cercle de projection préalablement divisé en degrés, on comptera à partir du même point E les latitudes et les longitudes, et sur la ligne des pôles PP′ on portera CV égale à la distance D du point de vue: en joignant ce point V à chaque extrémité N des parallèles à construire, on aura de suite en n l'extrémité de la projection située sur le diamètre EE′, et l'on n'aura plus qu'à décrire du point C un cercle avec Cn pour rayon. Les méridiens seront les diamètres du cercle de projection.

5. Lorsque la projection est méridienne, c'est-à-dire faite sur le plan du méridien perpendiculaire à celui à partir duquel on compte les longitudes, quelques considérations graphiques permettent d'en simplifier aussi la construction.

Reprenons d'abord les formules que nous avons trouvées au § 2 :

$$x = -\frac{Da \sin l}{D + a \cos l \cos t}; \qquad y = \frac{Da \cos l \sin t}{D + a \cos l \cos t};$$

on en déduit

$$x = -\frac{y \operatorname{tang} l}{\sin t}.$$

Remarquons d'abord que pour les latitudes négatives les valeurs de x changent seules de signe, les valeurs de y restent les mêmes ; c'est l'inverse qui a lieu pour les longitudes négatives. Ce résultat pouvait être prévu, car la figure 23 est évidemment symétrique par rapport aux axes PP′ et RR′.

Les coordonnées x et y se construisent de la manière suivante :

Représentons le plan de projection par un cercle de rayon égal à a (fig. 24); menons deux diamètres PP′, RR′, dont l'un représente le premier méridien et dont l'autre figure l'équateur. Prolongeons PP′ et portons CV égale à la distance donnée D. Portons à partir de R sur la circonférence PRP′R′ supposée graduée, l'arc RM égal au complément 90° — t de la longitude donnée et joignons MV. Portons ensuite MA $= l$ et abaissons la perpendiculaire AY sur le rayon CM; enfin, joignons VY; la distance Cy représentera l'ordonnée y. Joignons maintenant le point V au point A, et menons par y une parallèle yx

à YA ; la distance αy représentera l'abscisse x. Pour obtenir la projection du point considéré nous n'aurons plus qu'à porter cette longueur αy sur une ligne ay perpendiculaire au rayon CR, le point a sera la projection cherchée.

En répétant cette construction pour plusieurs valeurs de l et de t, on pourra tracer les méridiens en réunissant les points qui ont même longitude, et les parallèles en joignant les points qui ont même latitude. Il est d'ailleurs facile de construire ces courbes par de simples considérations géométriques et sans recourir au calcul des coordonnées.

Le petit axe d'un parallèle quelconque s'obtiendra immédiatement en portant, à partir des extrémités du diamètre EE' qui représente l'équateur, la latitude de ce parallèle de E en N et de E' en N', et en joignant ces deux points au point de vue V supposé rabattu sur le plan de projection; le milieu de nn' sera le centre de la courbe, et comme NN' sera l'une de ses cordes, il sera facile de la construire par points. Cette courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le plan de projection coupera l'une seulement des nappes du cône perspectif, ou les deux nappes, ou sera parallèle à l'une des génératrices; c'est ce que la figure montrera immédiatement.

Pour tracer les méridiens on portera sur la circonférence de la carte (fig. 25), à partir de P d'un côté et de P' de l'autre, la longitude du méridien considéré; en joignant ces points M, M' au point de vue supposé rabattu sur la ligne des pôles, on obtiendra en m, m' l'un des deux axes de l'ellipse; comme PP' est une corde commune, on construira facilement la courbe par points.

On peut encore obtenir de la manière suivante la projection d'un point donné par sa latitude et sa longitude.

Supposons (fig. 26) le plan du parallèle de latitude l rabattu sur le plan du premier méridien PEP'E' en N'MN ; menons OM faisant avec PP' un angle COM égal au complément de la longitude donnée, et abaissons la perpendiculaire $M\mu$ sur NN'; cherchons la perspective de μM. Celle de μ s'obtient en μ_1, celle de M en M_1 ; $\mu_1 M_1$ est donc la longueur de la perspective de la demi-corde μM, et comme cette corde est parallèle au plan de projection et perpendiculaire au premier méridien, sa projection doit être perpendiculaire à PP'. Si donc nous supposons maintenant que le plan EPE'P' représente le plan de projection, il suffira, pour avoir la projection de M, d'élever en μ, de part

et d'autre de PP', une perpendiculaire $\mu_1 m$ ou $\mu_1 m'$ égale à $\mu_1 M_1$; on obtiendra ainsi les projections des points qui ont pour latitude l et pour longitude, l'un t et l'autre $180° - t$.

Si l'on détermine ainsi pour chaque parallèle les points de même longitude, il suffira, pour tracer les méridiens, de faire passer par ces points des courbes continues.

6. Revenons maintenant au cas général de la projection horizontale où le plan de projection est un grand cercle quelconque de la sphère; nous allons montrer comment on peut obtenir graphiquement la projection d'un point quelconque sans recourir aux formules et aux calculs.

Soit AA (fig. 27) la ligne des pôles de la projection : sur le diamètre perpendiculaire CV on placera le point de vue à la distance donnée D; en tirant le diamètre PP' faisant avec AA' un angle égal à la latitude du lieu sur l'horizon duquel on veut tracer la projection, et joignant PV, P'V, on aura en p et p' les pôles de la carte, dont l'un sortira du cercle de projection. Les parallèles s'obtiendront en considérant d'abord, comme nous l'avons fait pour la projection méridienne, les traces de tous les parallèles de la sphère sur un plan perpendiculaire au plan de projection, c'est-à-dire sur le premier méridien qui passe par le point de vue, puis revenant de cette figure à celle de la projection par une simple rotation. On détermine ainsi de suite l'un des axes nn' de la courbe cherchée. Il est ensuite facile d'avoir la projection d'un point quelconque de ce parallèle correspondant à une longitude donnée t.

Supposons le parallèle rabattu sur le méridien de départ en N'MN; le point dont la longitude est t viendra en un point M tel que l'angle COM est égal au complément de l'angle t, soit $90° - t$. Abaissons la perpendiculaire $M\mu$ sur NN'; cette perpendiculaire $M\mu$ est en réalité parallèle au plan de projection dont la trace est ACA'; pour avoir sa perspective, nous joindrons d'abord μ et V, puis nous mènerons μM_1 égal à μM et parallèle à AA' et nous joindrons M_1 et V; $\mu_1 m_1$ sera la longueur de la perspective de μM; d'ailleurs μM étant, dans l'espace, perpendiculaire au plan ABA'B', sa perspective sera perpendiculaire à AA'; il suffira donc d'élever, en μ_1, $\mu_1 m$ perpendiculaire à AA' et égal à $\mu_1 m_1$; le point m sera la projection du point M dont la longitude est t et la latitude l.

Lorsque le parallèle rencontre l'axe AA', on a immédiatement deux points T, T' de sa projection en élevant TDT' perpendiculaire à

AA′ au point d'intersection ; car, si nous supposons d'abord que PE′P′E représente le premier méridien, le parallèle et le tableau étant tous deux perpendiculaires à ce plan, leur intersection sera perpendiculaire à AA′. Pour que ce cas se présente, il faut que la latitude du parallèle considéré soit moindre que le complément de la latitude du lieu sur l'horizon duquel on construit.

On voit de suite que la figure doit être symétrique par rapport à la ligne des pôles AA′ ; l'équateur passera par les trois points B, *e*, B′ ; *ee′* sera son petit axe.

Le parallèle qui, prolongé, passerait par le point de vue, sera seul représenté par une droite perpendiculaire à AA′ ; au delà les parallèles tourneront leur concavité en sens contraire.

Lorsqu'on aura déterminé, pour des latitudes suffisamment rapprochées, les lieux de même longitude, il suffira de les réunir par un trait continu pour tracer les méridiens qui devront être des ellipses.

7. Occupons-nous maintenant de déterminer la distance des deux points donnés par leurs projections.

Considérons d'abord le cas où l'un des deux points est au centre de la carte. En joignant ce point au second, on aura la perspective de la plus courte distance, puisque tout grand cercle qui passe par l'axe optique a pour projection perspective une ligne droite. Ainsi (fig. 28) C*a* est la perspective de la plus courte distance de C′ en A ; pour savoir ce qu'elle contient de degrés, on portera C*a* de C en α et l'on mènera la droite VαA ; le nombre de degrés contenus dans l'arc C′A sera celui qu'il s'agissait de trouver, parce que Cα est la projection de l'arc de grand cercle C′A.

On voit donc que l'échelle des plus courtes distances du centre de la carte à tous les autres points doit présenter une graduation semblable à celle que l'on effectue sur l'équateur des mappemondes construites sur le plan d'un méridien.

Arrivons maintenant au cas général. Soit d'abord MRN le plan de projection (fig. 29), V le point de vue, *a* et *b* les deux points donnés, projections des points A et B de la sphère. Si nous déterminons la longueur de la corde AB, il suffira de la porter sur la circonférence de la carte préalablement divisée en degrés et fractions de degrés pour lire l'arc sous-tendu et évaluer la distance soit en milles, soit en lieues ou en kilomètres. Nous allons donc chercher à construire sur la carte (fig. 30) le triangle AVB. Soient *a* et *b* les deux points donnés, MN un diamètre d'ailleurs quelconque que l'on pourra

prendre, pour simplifier, passant par l'un des deux points. Construisons les triangles rectangles aCV, bCV de la figure 29, en décrivant du centre C les arcs $a\alpha$, $b\beta$, portant sur une perpendiculaire au diamètre MN la longueur CV égale à la distance connue du point de vue au centre de la sphère, et joignant ce point V à α et à β. Si nous prolongeons ces droites $V\alpha$, $V\beta$ jusqu'à la rencontre de la circonférence de la carte, les droites VA_1, VB_1 seront évidemment égales aux rayons visuels AV, BV de la figure 29. Nous pouvons alors construire le triangle abV de la figure 29 en décrivant de a et b avec des longueurs respectivement égales à αV et βV des arcs de cercle qui se composent en V_1; en prolongeant aV_1 d'une longueur Aa égale à $A_1\alpha$ et bV_1 d'une longueur bB égale à βB_1, on aura formé en ABV_1 le triangle AVB de l'espace; la droite AB sera la corde de l'arc qui mesurera la distance des deux points considérés.

Dans le cas de la projection méridienne on peut évaluer la distance de deux points d'une manière très-rapide et assez exacte lorsque les méridiens et les parallèles de la carte sont suffisamment rapprochés. Remarquons d'abord que si les deux points sont sur un même méridien, il suffit de lire sur la circonférence qui limite la carte la différence de graduation de leurs deux parallèles. S'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer les deux points par deux autres semblablement placés par rapport au centre de la carte et se trouvant sur un même méridien; il suffit pour cela de découper un petit triangle de papier abC (fig. 31) et de le faire tourner autour du sommet C jusqu'à ce que les deux autres sommets se trouvent sur un autre méridien; ces deux nouveaux points étant évidemment à la même distance que les deux premiers, on n'aura plus qu'à lire la différence des latitudes de leurs deux parallèles. Au lieu du petit triangle de papier, on pourrait se servir d'un compas à trois branches que l'on ferait tourner autour de la pointe qui resterait en C.

8. Les formules et les constructions étant générales, on pourra supposer le point de vue à la distance que l'on voudra du centre de la sphère. Si ces deux points coïncident, la projection est dite *centrale* ou *gnomonique;* on suppose alors le plan de projection reculé jusqu'à la surface de la sphère à laquelle il devient tangent; tout grand cercle est représenté par une droite passant par le centre de la carte qui est le point de tangence du plan de projection et de la sphère. L'origine de cette projection, la plus ancienne que l'on connaisse, semble remonter au delà du Milésien *Thalès*, le prédicteur

d'éclipses, mort 548 ans avant notre ère. Appelé successivement des noms d'*horoscope* et d'*analemme*, elle fut aussi beaucoup employée par l'astronomie sous le nom de *gnomonique* pour esquisser la trace des phénomènes célestes à la surface de la terre, le baron de *Prony* proposa, en 1791, de s'en servir pour les cartes du cadastre. En 1803, Ch. T. *Reichard* fit paraître à Weimar un atlas de six cartes représentant le globe tout entier en projection centrale; ce sont les six faces d'un cube circonscrit à la sphère; il est évident en effet que les arcs terrestres étant représentés sur le plan de projection par leurs tangentes, l'arc de 90° excède toutes les limites possibles de ce plan, et que la projection du cercle entier exige au moins trois plans sur chacun desquels l'arc à projeter par sa tangente sera en moyenne de 60° de chaque côté du point de contact. Pour que ces trois plans se rencontrent sur la sphère dans tous ses aspects, il faut recourir au moins au tétraèdre, le plus simple de tous les solides terminés par des faces planes. Guidé par d'autres vues, *M. Élie de Beaumont* (1) a reconnu des avantages particuliers au choix des faces pentagonales d'un dodécaèdre régulier, et a publié comme spécimen une esquisse du pentagone européen, M. *Saint-Loup* a proposé de représenter la surface entière du globe sur les faces d'un icosaèdre régulier inscrit dans la sphère; on peut d'ailleurs employer un polyèdre quelconque, ainsi à Vienne le général *Franz* de *Hauslab* a proposé une projection centrale sur un polyèdre irrégulier de 48 faces triangulaires (2). Enfin, au chapitre des projections cylindriques, nous parlerons d'une projection centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Nous reviendrons longuement sur ce système de représentation (3). Les projections n°s XXIV, XXV, XXVI en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

9. Lorsque le point de vue est sur la surface de la sphère, la projection prend le nom de *stéréographique*, et jouit de cette propriété bien remarquable que tout angle tracé sur la sphère conserve sa grandeur en projection (4), d'où il résulte que tout cercle a pour projection un autre cercle. Ce système, qui n'a reçu le nom de sté-

(1) *Notice sur les systèmes de montagnes*, Paris, 1852, 3 vol. in-18, p. 1038.
(2) Voir *Bulletin de la Société de Géologie de Paris*, janvier 1851, p. 185.
(3) *Voir* 2e part., chap. III.
(4) *Voir* ci-dessus, chap. II, § 4.

réographique qu'en 1613 du jésuite *François d'Aguillon*, fut imaginé 130 ans avant J.-C. par le célèbre *Hipparque*, qui lui donna le nom de *planisphère*, et commença à être très-employé en géographie au commencement du XVIe siècle; il n'a cessé de l'être depuis, surtout en Allemagne, où il a dominé dans les publications d'ensemble et de détail (1); on l'a quelquefois désigné sous le nom d'*astrolabe de Gemma*.

Les projections nos I, II et III en montrent l'application sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

10. Enfin, si le point de vue est supposé à une distance infinie, les rayons visuels peuvent être regardés comme parallèles, la perspective devient une véritable projection orthogonale et prend le nom d'*orthographique;* il en résulte que tout cercle parallèle au plan de projection a pour représentation un cercle égal. Imaginé comme le précédent par Hipparque, ce système, appelé primitivement *analemme*, puis *astrolabe de Rojas* (1551), est resté exclusivement renfermé dans le domaine de l'astronomie jusqu'à l'atlas sphéroïdal de *Laguillermie* publié en 1843, et à l'atlas sphéroïdal et universel de *Garnier* publié en 1862. La projection no XXVII en est une application sous l'aspect méridien.

11. Nous reviendrons en détail sur ces trois genres de projections perspectives. Disons de suite que la projection stéréographique a l'inconvénient de diminuer beaucoup les distances et par suite les surfaces situées au centre de la carte, tandis que les parties voisines des bords conservent à peu près leur véritable grandeur; la projection orthographique, au contraire, conserve à peu près les distances au centre de la carte, mais diminue considérablement les parties voisines des bords. On conçoit donc qu'il ait dû venir à l'idée de trouver sur la perpendiculaire au plan du tableau un point de vue tel que les projections de points du globe également distants fussent elles-mêmes également espacées. Or si l'on appelle ns un certain nombre de divisions du méridien, np le même nombre de divisions correspondantes sur l'équateur et égales entre elles, on trouve

$$D = \frac{np \cos ns}{\sin ns - np}.$$

Cette valeur de D variant avec ns, c'est-à-dire avec n, prouve qu'il

(1) *Voir* plus loin, même chapitre, § 19.

n'y a pas de position pour le point de vue qui remplisse complétement le but que nous nous proposons d'atteindre.

Nous pouvons tout au moins chercher à satisfaire le mieux possible à la condition qu'on ne rencontre ni dans la projection stéréographique ni dans la projection orthographique. Reprenons l'expression générale d'un rayon de parallèle projeté, en fonction de la latitude et de la position du point de vue. Nous avons trouvé

$$\rho_p = \frac{Da\cos l}{D + a\sin l} = \frac{a\cos l}{1 + \frac{a}{D}\sin l}.$$

Dans le cas de la projection stéréographique $D = a$

$$\rho'_p = \frac{a\cos l}{1 + \sin l} = a \operatorname{tang}\frac{90° - l}{2}.$$

Dans le cas de la projection orthographique $D = \infty$

$$\rho''_p = \frac{a\cos l}{1 + \frac{1}{\infty}} = a\cos l.$$

Dans ce dernier cas ρ varie trop peu lorsque l est voisin de 0; dans le cas précédent, la valeur du sinus qui entre au dénominateur non-seulement détruit cet inconvénient, mais encore lui substitue le défaut contraire, quoique dans une proportion moindre.

12. *La Hire*, qui s'est occupé le premier de cette question (1), a proposé de placer le point de vue de telle sorte que le rayon visuel mené au milieu de chaque quadrant de l'hémisphère opposé partage le rayon de la sphère perpendiculaire à l'axe optique en deux parties égales; l'erreur serait ainsi nulle au centre de la carte, à sa circonférence et au milieu de chaque rayon. Pour calculer la distance du centre au point de vue, on a alors l'égalité

$$\frac{\frac{a}{2}}{a\sin 45} = \frac{D}{D + a\sin 45°}.$$

(1) *Histoire de l'Académie des sciences, année MDCCI avec les mémoires de mathématiques et de physique*, Paris, 1704, in-4, p. 97 à 101 et 255 à 260; *Construction d'un nouvel astrolabe universel*, par M. de la Hire, 3 décembre 1701.

d'où l'on tire facilement

$$D = a + a \sin 45°.$$

Ainsi, dans la projection de la Hire le point de vue est à une distance de la surface de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, égale au sinus de 45° ou à la moitié du côté du carré inscrit. Si l'on cherche (fig. 32) quelle est la partie du rayon CP qui représente la projection de l'arc de 22° 30', lequel est le quart du quadrant, on trouve $0{,}248a$ au lieu de $0{,}250a$; l'erreur est donc de $\frac{2}{10000}$ du rayon, ce qui, dans une mappemonde d'un petit rayon, est peu considérable.

Dans le cas de la production sur le méridien dont la longitude est de 90°, les coordonnées d'un point défini par sa latitude et sa longitude se calculent par les formules

$$x = \frac{D \sin t \cos l}{D + a \cos t \cos l}; \qquad y = \frac{x \operatorname{tang} l}{\sin t} = x \operatorname{tang} \varphi,$$

dans lesquelles on devra remplacer D par $1{,}7071068\ a$ ou log D par $0{,}2322606 + \log a$.

Dans le cas de la projection polaire, c'est-à-dire sur l'équateur, les rayons des parallèles sont exprimés par

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \dfrac{\sin l}{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{a \cos l}{1 + 0{,}585 \sin l},$$

ou environ

$$\rho_p = \frac{a \cos l}{1 + \frac{3}{5} \sin l}.$$

Enfin cette projection peut être faite sur l'horizon d'un lieu quelconque, et a été employée par son auteur à la construction de deux planisphères célestes sur le plan de l'écliptique.

La projection de la Hire n'a pas d'autre avantage que d'annuler les erreurs de représentation des longueurs en trois points des rayons de la circonférence de la carte. Quelques années avant la Hire divers géographes avaient cherché à obtenir la régularité de la représentation par divers expédients qui enlevaient à leurs projections le mé-

rite d'être perspectives. Le Père *Fournier* (1) proposait de représenter les méridiens par des ellipses équidistantes et les parallèles par des arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen ; J. B. *Nicolosi* publiait à Rome en 1660 une série de grandes cartes suivant une projection analogue à celle du Père Fournier en traçant les méridiens en arcs de cercle comme les parallèles et les faisant passer par les divisions égales de l'équateur (2). Cette construction adoptée et préconisée en France par *Pierre du Val*, *Guillaume de l'Isle*, etc., est connue en Angleterre sous le nom de projection globulaire ou projection d'*Arrowsmith*, quoique ce dernier ne l'ait employée qu'en 1794, c'est-à-dire trente-quatre ans après son invention (3). Nous reviendrons (4) sur ce dernier système, que nous n'avons mentionné ici que parce qu'il est souvent, mais à tort, confondu avec la projection de la Hire.

13. Un an après que la Hire eut exposé son système à l'Académie, son confrère *Parent* calcula que les conditions seraient meilleures si l'éloignement de l'œil était un peu modifié (5).

Considérons l'un quelconque des grands cercles passant par le point de vue (soit l'équateur), et supposons-le divisé en parties infiniment petites égales; tirons des rayons visuels par chaque point de division, de manière à former sur le plan du tableau les perspectives de ces petits éléments. Si ces éléments projetés étaient parfaitement égaux, la somme de leurs différences serait nulle ; Parent fut ainsi porté à chercher parmi toutes les positions du point de vue celle qui donne la somme minimum de ces différences.

Soit (fig. 33) EAE' l'équateur, PRP' le méridien pris pour plan de projection ; V le lieu de l'œil sur le diamètre CV perpendiculaire à ce

---

(1) *Hydrographie*, Paris 1647, p. 524, *voir* ci-dessus chap. III, p. 107.

(2) *Hercules siculus sive Studium geographicum, auctore J. B.* NICOLOSIO, *Hyblensi, sacerdote et sacræ theologiæ doctore*, Rome 1671, 2 vol. in-folio, édition latine de l'ouvrage publié en 1660 en italien.

(3) *Map of the World on a globular projection, by* A. ARROWSMITH, Londres, 1er janvier 1794.

(4) *Voir* 2e partie, chap. XIV, 2°.

(5) *Histoire de l'Académie des sciences*, années MDCCII, Paris 1704, p. 70 à 72 de l'histoire; *sur l'Astrolabe.* — *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, par M. PARENT, Paris 1713, 3 vol. in-12 ; t. II, p. 613 à 630 et 917 à 921 (additions). — *Mémoires de Trévoux*, juillet 1712, in-12, p. 1240 à 1250 : *De la situation de l'œil qui donne les représentations des parties égales de la sphère les plus égales qu'il soit possible, avec la manière de faire des mappemondes et des cartes géographiques sur ce principe, et d'y mesurer toutes sortes de distances.*

plan. Divisons le demi-cercle RER en parties infiniment petites égales, telles que AA' et menons des rayons visuels à tous ces points de division, nous obtiendrons leurs perspectives a, a', a''... La position du point V devra être telle que la somme de ces longueurs aa' soit la plus petite possible. Menons AX, A'X' perpendiculaires à EE', de manière à déterminer les coordonnées $AX = y$ et $CX = x$. Si nous nommons ds l'arc infiniment petit AA', et z la distance CA, XX' sera dx, et aa' sera Δz. Enfin tirons AB parallèle à VE', de manière à former le petit triangle rectangle ABA'.

Nous aurons d'abord, par les triangles semblables VaC, VAX

$$\frac{z}{y} = \frac{D}{D+x}; \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{D\sqrt{a^2-x^2}}{D+x}.$$

Calculons Δz en supposant la distance D constante,

$$\Delta z = \frac{a^2+Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{Ddx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Or les triangles semblables CAX, ABA' donnent

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{AX}{AC}; \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{ds}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Substituons cette valeur dans celle de Δz, il viendra

$$\Delta z = \frac{a^2+Dx}{(D+x)^2} \cdot \frac{Dds}{a},$$

ou, en posant $D + x = u$

$$\Delta z = (a^2 + Du - D^2)\frac{Dds}{au^2}.$$

Or la somme des différences des éléments Δz est évidemment égale à la différence du plus grand (soit aa') au plus proche du centre C, augmentée de la différence de ce même aa' au plus proche du bord R. Cherchons donc quelle est, pour une même valeur de D. la plus grande ou la plus petite de toutes ces grandeurs Δz. Égalons pour cela la différentielle à zéro :

$$(-Du^2 - 2au^2 + 2D^2u)\frac{Dduds}{au^4} = 0;$$

d'où

$$u = D + x = \frac{2D^2 - 2a^2}{D};$$

d'où enfin

$$x = -\frac{2a^2}{D} + D.$$

Substituons cette valeur de x dans la valeur générale de Δz pour avoir l'expression de la plus grande ou de la moindre des projections des arcs ds; il viendra

$$aa' = \frac{D^3 ds}{4a(D^2 - r^2)}.$$

Pour avoir les deux autres éléments, il suffit, dans l'expression générale de Δz, de remplacer x d'abord par a, puis par 0; on obtient ainsi

$$(\Delta z)_a = \frac{D ds}{D + a} \qquad \text{et} \qquad (\Delta z)_0 = \frac{a ds}{D}.$$

Si nous retranchons la somme de ces deux éléments projetés du double de aa' et que nous égalions à zéro la différentielle prise par rapport à D, nous obtenons l'équation

$$D^6 - 3 D^4 a^2 + 4D^3 a^3 - 6D^2 a^4 + 2a^6 = 0,$$

qui doit nous donner la valeur de D.

En substituant à D la valeur a, le résultat est négatif; pour $D = 2a$ il est positif; la valeur cherchée de D est donc comprise entre a et $2a$. Pour $a\sqrt{2}$ le résultat est négatif; la racine est donc comprise entre $1,41\,a$ et $2\,a$; on voit de même qu'elle est comprise entre $1,59\,a$ et $1,60\,a$; si l'on prend $D = 1,595\,a$, l'erreur est moindre que la 200[e] partie du rayon, ce que Parent estime être assez juste pour la pratique.

En remplaçant D par cette valeur dans l'expression de l'asbcisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cet élément correspond à peu près au 70[e] degré à partir du point E ou au 20[e] à partir de R.

Si l'on cherche la valeur des parties les plus proches de R et de C, on trouve qu'elles ne diffèrent pas entre elles de plus de $\frac{1}{60}$ de la moindre. Enfin, si l'on cherche le point d'où ces éléments projetés seraient vus égaux, on trouve $D = 1,618\,a$, valeur qui ne diffère de celle adoptée par Parent que de $\frac{1}{43}$ du rayon.

La Hire, en prenant pour D la valeur $1,707\,a$ au lieu de $1,595\,a$, commettait une erreur qui est à peu près les $\frac{11}{100}$ du rayon, ou un peu plus de $\frac{1}{9}$, quantité très-appréciable dans les planisphères de grandeur ordinaire.

Si l'on voulait trouver la position de l'œil pour laquelle les éléments projetés paraissent aller tous en augmentant du centre vers la circonférence, et celle pour laquelle ces éléments paraissent aller tous en diminuant, il suffirait de supposer pour le premier cas $x = 0$ et D variable dans la valeur de x qui correspond à l'élément projeté maximum, ce qui donnerait

$$D = a\sqrt{2} = 1,414 \ldots a;$$

pour le second cas on remplacerait x par a et l'on trouverait

$$D = 2a.$$

11. Au lieu de procéder comme nous venons de le faire, on peut chercher à rendre les représentations des parties égales de la sphère aussi égales que possible, de manière à répartir à peu près également l'erreur totale.

Or si l'on partage le rayon (fig. 54) en autant de parties égales que le quadrant EAR, que par les points de division on élève des perpendiculaires égales aux valeurs de Δz et qu'on joigne les extrémités par une courbe continue, on obtiendra, pour chaque valeur de D, une courbe différente et une ordonnée maximum aa' aussi différente. Soit $c_1a_1r_1$ l'une quelconque de ces courbes; comme la somme de toutes les ordonnées est constante et égale au rayon, si nous construisons une seconde courbe pour une autre valeur de D, ayant une ordonnée maximum moindre que aa', elle aura une plus petite courbure que la première, et l'on voit ainsi que celle qui possède la moindre de toutes les ordonnées maximum sera celle qui se rapprochera le plus d'une ligne droite. Si a_1a_1' était (ce que nous ne savons pas encore) l'ordonnée minimum de chaque courbe, on verrait de même que la courbe de moindre courbure correspond à la valeur de D qui donnerait la plus grande de toutes les ordonnées minimum aa'.

Cette valeur de D s'obtiendra donc en égalant à zéro la différentielle de la valeur de aa' considérée comme fonction de la variable D. On obtient ainsi

$$D = a\sqrt{3} = 1,732 \ldots a.$$

Ainsi la distance du point de vue au centre est égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

Si l'on substitue cette valeur de D dans l'expression de aa', on obtient

$$aa' = \frac{3}{8}\, ds\sqrt{3} = 0{,}649 \ldots ds.$$

Si l'on fait la même substitution dans l'expression générale de Δz, puis qu'on y remplace x par a, on obtient pour l'élément projeté le plus près du centre C

$$(\Delta z)_a = \frac{ds\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 0{,}634 \ldots ds,$$

et enfin en remplaçant x par 0, pour avoir l'élément le plus proche de R,

$$(\Delta z)_0 = \frac{ds\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \ldots ds.$$

Ces trois valeurs montrent que aa' est la plus grande de toutes les projections Δz et non la moindre, et qu'elle ne surpasse la plus petite qui est en R que de $\frac{1}{8}$ de sa propre valeur. La valeur de x correspondant à cet élément maximum est

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

ce qui montre que cet élément est à peu près à 55° du point E.

Nous désignerons le système que nous venons d'exposer sous le nom de *seconde projection de Parent* pour le distinguer du précédent où la valeur de D est 1,595... a.

13. En 1825, un graveur de Londres, John *Lowry* (1), reprit la même question et chercha successivement les distances où il fallait placer le point de vue pour que les arcs de 5°, 10°, 15°..., 85° fussent représentés sur la carte par des parties proportionnelles du rayon; cela ne pouvant avoir lieu à la fois que pour un seul de ces arcs, Lowry obtint dix-sept déterminations successives du point de vue entre lesquelles il prit une moyenne: il trouva ainsi 1,69 a pour la distance du point de vue au centre, nombre qui changerait si l'on faisait entrer dans le calcul des arcs plus petits; mais la différence

(1) Lacroix, *Precis du rapport verbal fait à l'Académie des sciences le 12 septembre 1825*, dans le *Bulletin de la Société de geographie*, cahier de septembre 1825, p. 127 à 130.

serait au-dessous de $\frac{a}{1000}$ si l'on prenait rigoureusement le milieu entre toutes celles qui correspondent aux différents points du quart de cercle.

En comparant par le calcul la graduation des cartes de Lowry avec celle qui résulte de la détermination de la Hire, on ne trouve que des différences insensibles, au moins dans les dimensions adoptés pour les cartes ordinaires; il faudrait que le rayon fût de 1 mètre pour qu'il y eût quelques millimètres de différence entre les unes et les autres. On doit dire aussi que Lowry s'est rapproché encore de la Hire dans la note qu'il a communiquée à l'Académie, où il a adopté pour distance **1,70** a, tandis qu'en citant la Hire au bas de ses hémisphères construits sur l'horizon de Londres, il a mis **1,68** a qui n'est ni le résultat qu'il a obtenu ni celui de la Hire.

16. Les projections perspectives peuvent êtres étendues au delà d'un hémisphère, à l'exception de la projection centrale qui ne peut même représenter un hémisphère entier et de la projection orthographique qui ne pourrait être employée à plus de 90° du point central qu'à la condition de surcharger les bords de la carte. La question se présente lorsque l'on veut, par exemple, dresser une carte des étoiles visibles au-dessus de l'horizon d'un lieu, ou, en géographie, lorsque l'on veut embrasser d'un seul coup d'œil, pour des considérations de physique terrestre, l'ensemble des grands continents.

La projection stéréographique employée dans ce but altère beaucoup trop les distances sur les bords de la carte, puisque, dans une projection polaire, le degré d'un méridien à 109° du pôle est représenté par une longueur trois fois plus grande qu'au centre.

Pour chaque projection perspective dont le point de vue doit être situé à l'extérieur de la surface, la limite à laquelle elle peut être employée dépend de la distance du point de vue; elle est exprimée (fig. 35) par l'arc de grand cercle CAT compris entre l'extrémité c du diamètre passant par le point de vue et le cercle de contact de la sphère et du cône tangent. Cet arc φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}(180° - \varphi) = \sqrt{\frac{D^2}{a^2} - 1}.$$

Si l'on voulait appliquer la méthode dont s'est servi Parent dans sa première projection pour représenter une portion plus grande qu'un hémisphère, portion mesurée par l'arc de grand cercle compris entre

le centre et la circonférence-limite de la carte, on suivrait la même méthode en remplaçant seulement la valeur de l'élément au bord de la carte par celle que prend cet élément à la limite donnée. On trouverait ainsi une valeur de D qui dépendrait de cette limite. Le reste du calcul et la construction s'achèveraient de même.

C'est ici le lieu de mentionner la projection du globe entier en quatre parties proposée par M. J. W. *Woolgar* en 1833. On projette la sphère par la méthode stéréographique sur les quatre faces d'une pyramide équilatère, afin qu'en représentant une portion de la surface moindre qu'un hémisphère, l'altération des distances vers les bords puisse être en partie évitée; en outre, chaque carte se relie aux autres par une partie commune. L'axe de la pyramide passe par la ligne des pôles, et le pôle sud touche la base de ce solide en son centre. La latitude des centres des trois autres faces est de 19° 28 16", N., et le pôle N. se trouve sur la circonférence-limite de chacune d'elles, circonférence qui a pour rayon 70° 30' au lieu de 90°; les longitudes de leurs centres diffèrent, par conséquent, de 120°. Sur chaque face l'échelle ne varie que dans le rapport de 1 à 1,5 au lieu de 1 à 2, comme dans la projection stéréographique d'un hémisphère.

17. Tout ce que nous avons dit sur le choix des points de vue dans les projections perspectives ne peut s'appliquer qu'à la graduation marquée sur le rayon des cartes; les quadrilatères compris entre les méridiens et les parallèles sont sensiblement agrandis sur les bords de la projection.

Parent (1) s'est aussi occupé de chercher quelle position on doit donner au point de vue sur un diamètre quelconque EE (fig. 36) pour que les zones égales en surface qui composent l'hémisphère opposé RER', et qui ont EE' pour axe soient représentées en perspective sur le grand cercle perpendiculaire à EV par d'autres zones égales entre elles.

Prenons un arc quelconque $AA' = ds$; nommons x l'ordonnée CX, z la distance Ca et D la distance CV. On aura

$$z = \frac{D\sqrt{a^2 - x^2}}{D + x}; \qquad aa' = \Delta z = \frac{a^2 + Dx}{(D + x)^2}\frac{D dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

(1) Parent, *Essais et recherches de mathématiques et de physique*, t. II, p. 925-930, déjà cité.

La zone circulaire qui a Ca pour rayon et aa' pour largeur, et qui est la représentation de la zone sphérique qui a AN' pour largeur et EV pour axe, a pour surface

$$2\pi z\,dz \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\pi(a^2 + \mathrm{D}x)}{(\mathrm{D}+x)^3}\,\mathrm{D}^2 dx;$$

la zone sphérique correspondante a pour surface

$$2\pi a dx.$$

L'hypothèse que toutes les zones sphériques sont prises égales exige donc que tous les dx soient cónstants.

Posons $\mathrm{D} + x = u$; la valeur de la zone circulaire se change en

$$\frac{2\pi(a^2 + \mathrm{D}u - \mathrm{D}^2)\,\mathrm{D}^2 dx}{u^3},$$

dont la différentielle est

$$(\mathrm{D}u^3 - 3u^2a^2 - 3u^2\mathrm{D} + 3u^2\mathrm{D}^2)\,\frac{\mathrm{D}^2 du dx}{u^6},$$

qui, égalée àzéro, donne

$$-3a^2 - 2\mathrm{D}u + 3\mathrm{D}^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \mathrm{CX} = \frac{1}{2}\,\mathrm{D} - \frac{3}{2}\,\frac{a^2}{\mathrm{D}}$$

pour l'abscisse correspondant à la zone maximum.

De plus, si dans l'expression générale de la valeur de la zone circulaire, on suppose $x = 0$, il vient pour l'expression de la dernière zone vers le bord de la carte

$$\frac{2\pi a^2 dx}{\mathrm{D}},$$

et, si l'on suppose $x = a$, la dernière zone vers le centre C est exprimée par

$$\frac{2\pi a\,\mathrm{D}^2 dx}{(a+\mathrm{D})^2}.$$

Enfin, en remplaçant, dans l'expression générale, x par la valeur CX qui convient à la zone maximum, on obtient, pour l'expression de ce maximum,

$$\frac{8\pi\mathrm{D}^5 dx}{(\mathrm{D}^2 - a^2)\,27}.$$

Par le même raisonnement qui nous a guidé dans l'étude de la première projection de Parent, nous sommes conduit à retrancher

la somme des deux zones en C et R du double de la zone maximum, et à égaler la différentielle de cette quantité à zéro, en supposant que D soit la variable ; nous obtenons ainsi l'équation

$$8D^8 - 121\,D^6a^2 + 162\,D^5a^3 - 81\,D^4a^4 + 54\,D^3a^5 - 81\,D^2a^6 + 27a^8 = 0.$$

Par des substitutions successives on trouve

$$D = 2.105 \quad .a,$$

au lieu de 1,595..a que Parent avait trouvé en cherchant à rendre égales les projections d'arcs égaux, ce qui démontre une fois de plus qu'on ne peut conserver en même temps l'égalité des surfaces et celle des configurations.

En remplaçant D par cette valeur 2,105..a dans l'expression de l'abscisse x de l'élément projeté maximum, on trouve que cette zone correspond au 70° degré à partir de E ; ainsi le maximum d'altération de distance et d'exagération a lieu au même point, à 70 degrés environ du centre de la projection.

18. En cherchant les deux zones les plus proches du bord R et du centre C, on trouve qu'elles ne diffèrent entre elles que de $\frac{1}{25}$ de la plus petite des deux à fort peu près, et que le point de l'axe EE' d'où ces deux zones seraient vues égales n'est éloigné du point V que de $\frac{1}{25}$ du rayon.

Nous avons encore à parler d'un autre système de projection perspective destiné à représenter les deux tiers environ d'une surface sphérique de manière que les configurations soient déformées le moins possible sans cependant que les surfaces extrêmes soient dilatées ; c'est le système imaginé en 1857 par le colonel Henri *James*, directeur de l'*Ordnance survey*, et modifié plus tard par le capitaine A. R. *Clarke* du même service, qui adopte pour distance du point de vue au centre la valeur D = 1,36763 a au lieu de la valeur 1,50 a adoptée par le colonel James (1) ; mais comme quelques considérations préalables sur un certain groupe de projections (projections zénitales) dont les projections perspectives font elles-même partie, nous sont nécessaires pour aborder ce sujet, nous en renvoyons l'étude au chapitre suivant (2).

---

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by colonel sir H.* James, *and captain A. R.* Clarke ; *communicated by the authors*, dans le *Philosophical Magazine*, cahier d'avril 1865, p. 306 à 312.

(2) *Voir* chap. V, § 9.

19. Avant de terminer ce chapitre, disons un mot des cartes géographiques particulières construites en projection perspective. La projection stéréographique est peu employée dans ce cas; il n'y a guère que les Allemands qui s'en soient servis, et particulièrement *Hass* (Leipsick, 1717), qui a composé la plus grande partie des cartes de l'atlas de *Homann*, fort répandu vers le milieu du siècle passé; les quatre parties du monde representées isolément dans cette projection ne sont que des portions d'une mappemonde construite avec de plus grandes dimensions sur le plan du méridien perpendiculaire à celui qui passe par le milieu de la carte et qui contient le point de vue. La longueur excessive des rayons des cercles exigeant l'emploi des formules pour la construction par points fait perdre l'avantage du tracé d'arcs de cercle, et rend cette projection inférieure sous tous les rapports aux projections perspectives qui, en plaçant le point de vue hors du globe, diminuent l'inégalité des espaces. La distance à laquelle il conviendra de placer ce point de vue sur le diamètre passant par le centre du pays à représenter dépendra de l'étendue de ce pays, diminuera à mesure que cette étendue deviendra plus petite, et pourra se calculer aisément en comparant le degré sur les bords de la carte avec celui qui se trouve au milieu. Le procédé de calcul sera d'ailleurs identique à celui qu'a donné Parent pour sa première projection d'un hémisphère.

Lorsque l'échelle de la carte à construire sera suffisamment grande pour rendre appréciable la différence entre les degrés réels de la terre sphéroïde et les degrés d'une sphère ayant pour rayon celui de l'équateur, on tiendra compte de l'aplatissement par la méthode de Prony que nous avons exposée (1), et l'on cherchera le rayon de la sphère qui s'adapte le mieux à la courbure du sphéroïde terrestre dans le voisinage du centre de figure du pays dont on veut dresser la carte. A l'aide des nouveaux degrés calculés d'après cette méthode, on déterminera la distance du point de vue au centre de cette sphère, et la construction s'achèvera soit par coordonnées, soit par le tracé des ellipses, comme nous l'avons indiqué précédemment.

20. Nous avons vu que les projections perspectives ne diffèrent les unes des autres que par la position du point de vue. Il en résulte un moyen facile de passer d'une projection perspective à une autre ayant même plan de projection et par conséquent même centre.

(1) *Voir* ci-dessus, chap. 1, § 4, p. 11.

Soit en effet (fig. 37) *m* la projection d'un point M de la sphère dans un premier tracé perspectif dont OV représente la distance D du point de vue au centre de la sphère; on demande la projection du même point M sur le même horizon dans un second tracé dont OV′ représente la distance D′ correspondante à D.

Joignons le point *m* au centre O de la projection, élevons OV perpendiculaire sur *om* et portons la distance D de O en V. Si nous joignons V*m*, l'arc MA compris entre les droites V*m* et VO prolongées sera l'arc de grand cercle qui a pour projection *om*. Si donc nous portons la seconde distance D′ de O en V′, en joignant le point M au point V′, l'intersection *m*′ de cette droite avec le rayon *om* sera la projection de M dans le second tracé.

Il suffira donc, pour passer du premier système au second, de mener dans chacun d'eux des rayons vecteurs faisant respectivement les mêmes angles avec un axe fixe, le méridien du centre, par exemple, et de porter, sur ceux du second système, les longueurs telles que *om*′ déterminées dans le premier. On déterminera ainsi, à l'aide d'autant de points que l'on voudra, les méridiens, les parallèles et en général toute courbe tracée sur la projection *type*. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est souvent avantageux de construire d'abord un canevas *type* pour obtenir ensuite, par la méthode que nous venons d'exposer, le canevas définitif dont le tracé direct aurait été plus difficile à obtenir.

CHAPITRE V.

PROJECTIONS ZÉNITHALES.

1. Nous avons vu que lorsqu'une projection perspective est faite sur le plan de l'équateur les parallèles sont représentés par des cercles ayant tous pour centre la projection du pôle et les méridiens par des diamètres de l'équateur. Il n'en est plus de même lorsqu'on prend pour centre de la carte un point quelconque de la surface de la sphère, et pour plan de projection l'horizon de ce lieu. Mais si, au lieu de considérer les méridiens et les parallèles, on imagine une suite de plans perpendiculaires au diamètre de la sphère qui passe par ce lieu et d'autres perpendiculaires aux premiers et passant tous par ce diamètre, on recomposera un système de coordonnées sphériques semblable à celui auquel on rapporte tout point de la sphère terrestre : les parallèles seront remplacés par des almicantarats et les méridiens par des cercles azimutaux. La projection sera en tout semblable à la projection équatoriale; les almicantarats seront figurés par des cercles décrits autour du point central considéré, et les verticaux d'azimuts égaux par des diamètres de l'horizon de ce lieu également inclinés les uns sur les autres.

Les projections perspectives ne sont pas les seules à jouir de la propriété de conserver les azimuts autour du point central et de représenter des distances égales de ce point aux autres points de la sphère par des distances égales entre elles sur la projection, et par conséquent toujours faciles à mesurer. Nous avons déjà été conduits à étudier un certain nombre d'autres systèmes, tels que la projection isosphérique isomère de Lambert (1), dans lesquels la loi de représentation reste la même dans toutes les directions partant du point central de la carte. Nous les désignerons tous sous le nom de

(1) *Voir* chap. III, § 14.

projections zénithales parce qu'ils peuvent toujours être considérés comme la représentation de l'hémisphère situé au-dessus de l'horizon du lieu et ayant le zénith pour pôle.

2. Dans ces différents systèmes il suffit de connaître la loi suivant laquelle varient les rayons des almicantarats d'un point quelconque de la surface, et il est inutile de s'embarrasser des considérations de la place du pôle et de la forme des courbes qui représentent les méridiens et les parallèles ; une simple transformation de coordonnées sphériques permettra d'obtenir les intersections de ces deux systèmes de courbes, c'est-à-dire de calculer les nouvelles coordonnées en fonction des longitudes t et des latitudes l supposées connues.

Soit P le pôle (fig. 38), HPCH' le méridien du lieu C sur l'horizon duquel on veut faire la projection et qui doit occuper le centre de la carte ; nous supposerons les longitudes comptées à l'est et à l'ouest de ce méridien, ce qui revient à ne considérer que les différences entre les longitudes réelles et la longitude du centre C. Soit λ sa latitude, A un lieu de la terre dont on connaît la longitude t et la latitude l. Si nous supposons menés les grands cercles PA, CA, nous formerons le triangle sphérique PCA dans lequel nous connaîtrons le côté $PC = 90° - \lambda$, le côté $PA = 90° - l$ et l'angle en P égal à la longitude t comptée à partir du méridien PCH' ; il s'agit de trouver le côté CA qui mesure la plus courte distance θ des deux points C et A sur la sphère de l'azimut PCA que nous appellerons z.

La trigonométrie sphérique permet de calculer θ et z par les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{\sin t}{\sin\theta}\cos l,$$

dans lesquelles l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda.$$

Dans le cas où le centre de la carte est pris sur l'équateur, λ est égal à zéro et les formules se transforment en

$$\cos\theta = \cos t \cos l \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} z = \sin t \operatorname{cotang} l.$$

Ainsi, pour chaque lieu dont on connaît la latitude et la longitude, on pourra calculer θ et z ; comme d'ailleurs on connaît la loi

$$\rho = F(\theta),$$

qui exprime le rayon ρ de chaque almicantarat en fonction de l'arc correspondant θ, il sera très-facile de placer sur la carte la projection du point donné A. Lambert (1) a proposé l'emploi simultané d'une table contenant les valeurs calculées de z et θ pour des valeurs données de l et t, et d'une règle pouvant tourner autour du centre de la projection et divisée à partir de ce point d'après la loi $\rho = F(\theta)$ qui définit le système que l'on veut tracer. Pour pouvoir mesurer immédiatement les angles de la règle avec le diamètre PC qui représente le méridien du centre (fig. 39), on divise la circonférence de la carte en degrés et fractions à partir de l'extrémité de ce diamètre. Pour un point quelconque A (l et t), on lit dans la table les valeurs de z et θ; en faisant tourner la règle jusqu'à ce qu'elle fasse avec le diamètre PC, cet angle z, le point qui indique sur la règle la valeur de θ sera le point A cherché.

Sans recourir nécessairement à l'emploi de la règle, on voit qu'il suffira de dresser une seconde table donnant les valeurs de ρ pour chaque valeur de θ et de porter ces valeurs de ρ à partir du centre C sur les diamètres faisant avec le méridien PC les angles correspondants z donnés par la première table.

On voit que la figure sera symétrique par rapport au méridien PC du centre, et lorsque ce centre sera pris sur l'équateur elle sera aussi symétrique par rapport à l'équateur. Dans ce cas, quelle que soit la projection zénithale que l'on considère, le méridien central et l'équateur sont divisés de la même manière et le méridien limitant l'hémisphère est divisé en arcs égaux ; les parallèles coupent à angles droits le méridien central, et les méridiens coupent à angles droits l'équateur.

On pourra aussi, pour plus d'exactitude, placer chaque point par ses coordonnées rectangulaires calculées à l'aide des formules

$$x = \rho \sin z; \qquad y = \rho \cos z.$$

Nous reproduisons table IV, les tables calculées par Lambert, pour le cas où $\lambda = 0$, c'est-à-dire où le centre de la carte est pris sur l'équateur (2).

---

(1) *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik durch* LAMBERT, Berlin 1772, in-8, t. III, p. 174.

(2) Dans les tables données par Lambert et reproduites par *J. Tobias* MAYER (*Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-See-und Himmelscharten*, Erlang 1794 (4ᵉ édit., 1828), in-8, § 50), ce n'est pas l'angle z qui est donné, mais son complément $90° - z$.

3. Lorsque, dans le tracé des méridiens et des parallèles, on ne tient pas à une exactitude mathématique, la remarque suivante permet de construire les projections de ces courbes d'une manière beaucoup plus simple.

Si, sur deux projections différentes ayant pour centre la projection d'un même point de la surface sphérique, on trace (d'après les lois $\rho = F(\theta)$ et $\rho' = F'(\theta)$ de ces deux projections) les almicantarats et les rayons représentant les mêmes petits cercles et les mêmes plans verticaux de la sphère, toutes les intersections des méridiens et des parallèles occuperont, par rapport aux cercles et aux rayons dont nous venons de parler, les mêmes places sur l'une et l'autre projection.

Si donc nous possédons une projection sur laquelle soient tracés les méridiens et les parallèles de 10° en 10°, par exemple, ainsi que les almicantarats et les verticaux aussi de 10° en 10°, pour toute autre projection définie par la formule $\rho = F(\theta)$, nous n'aurons qu'à tracer, avec les rayons des almicantarats de 10 en 10°, c'est-à-dire avec les valeurs de $F(\theta)$ résultant des valeurs de θ de 10° en 10°, des cercles concentriques que nous couperons ensuite par des rayons également espacés; nous pourrons alors placer sur ces rayons et ces cercles les intersections des méridiens et des parallèles de la même manière qu'elles le sont dans la première projection.

Parmi toutes les projections qui peuvent servir de canevas *type* pour tracer les autres, l'une des plus commodes est la projection stéréographique sur l'horizon du lieu qui doit servir de centre, parce que les méridiens et les parallèles y sont des cercles qui se tracent avec la plus grande facilité (1). On y décrira, du centre, des cercles de rayons égaux à a tang $\frac{10^\circ}{2}$, a tang $\frac{20^\circ}{2}$, etc., et l'on tracera des rayons inclinés de 10 degrés; cette projection pourra alors être employée pour déterminer les intersections des méridiens et des parallèles sur une projection quelconque à almicantarats concentriques et circulaires décrits autour du même centre d'après une loi connue.

Ce procédé très-rapide n'est d'une exactitude suffisante que lorsque l'échelle de la carte à tracer est très-petite; mais il est possible d'obtenir une exactitude beaucoup plus grande en déterminant d'abord

(1) *Voir* 2e part., chap. I, Projection stéréographique.

pour autant de points que l'on veut de la projection *type* le nombre de degrés et minutes contenus dans l'arc de grand cercle qui joint chacun de ces points au point central, puis faisant sur chacune de ces valeurs la construction ou le calcul indiqué par l'équation $\rho = F(\theta)$ de la projection que l'on veut obtenir.

Soit M_1 (fig. 40) un point quelconque de la projection type, que nous supposerons stéréographique; O_1 le centre du tracé, lequel sera reporté en O sur la carte zénithale à construire; $\pi_1\pi_1'$ le méridien du point O_1 représente par la droite $\pi\pi'$ sur la projection zénithale; si nous supposons la projection stéréographique construite sur un grand cercle de la sphère, le rayon $O_1\pi_1'$ de la circonférence qui limite un hémisphère sera le rayon de la sphère. Si l'on fait au point O de la carte l'angle πOM égal à l'angle $\pi_1 O_1 M_1$, le point cherché M qui correspond à M_1 est situé sur la droite OM; et si l'on connaissait l'arc de grand cercle θ qui, sur la sphère, joint les deux points dont les projections sont O et M, la position de ce ponit M serait entièrement déterminée puisque la distance $\rho = F(\theta)$ pourra toujours se déduire de l'arc θ. Pour trouver cet arc, il suffira de mener un diamètre AB perpendiculaire sur le rayon O_1M_1 et de joindre A_1M_1 que l'on prolongera jusqu'à la circonférence de l'hémisphère; l'arc Bμ sera l'arc cherché, on le mesurera en degrés et minutes en portant une ouverture de compas égale à la corde Bμ sur cette circonférence ou sur une égale que l'on aura divisée en degrés et fractions.

On abrégera beaucoup cette méthode s'il s'agit de construire un grand nombre de points de la projection zénithale, par exemple les points d'intersection des parallèles et des méridiens de 5 en 5, ou de 10 en 10 degrés, en remarquant que l'arc Bμ ne dépend que de la distance O_1M_1. On pourra donc décrire (fig. 41, avec un rayon CA égal au rayon de la sphère, une demi-circonférence, mener un diamètre BA et un rayon CD perpendiculaire, diviser ce dernier en parties égales suffisamment petites, joindre les points de division au point A et prolonger ces droites jusqu'à la rencontre de l'arc BD préalablement divisé en degrés et fractions de degrés à partir du point B. Cela posé, si l'on porte de C en K' une longueur O_1M_1 prise sur la projection stéréographique, on trouvera sur-le-champ la longueur BK de l'arc correspondant avec une approximation d'autant plus grande qu'on aura multiplié davantage le nombre des parties dans lesquelles le rayon CD est divisé.

On pourrait aussi construire comme projection type une projection

orthographique ; mais les méridiens et les parallèles étant des ellipses plus difficiles à construire que les cercles de la projection stéréographique, le travail préparatoire serait plus grand et plus sujet à erreurs. Si cependant on avait déjà une projection orthographique sur l'horizon du lieu que l'on veut prendre pour centre, il suffirait pour dresser l'échelle graphique qui donnera les valeurs de l'arc θ, de décrire (fig. 42) avec le rayon de la sphère un quart de circonférence, de partager l'un des rayons CD en autant de parties égales que l'on voudra et d'élever des perpendiculaires jusqu'à la rencontre du quadrant ; les arcs BK seraient les valeurs de θ correspondantes aux rayons vecteurs de la projection orthographique qui auraient CK' pour longueur.

Quelle que soit la projection auxiliaire que l'on emploiera, on pourra obtenir, non-seulement les projections des méridiens et des parallèles à l'aide de leurs intersections, mais encore la projection d'un cercle ou d'une courbe quelconque dont on connaîtra déjà la représentation sur un canevas auxiliaire.

4. Nous allons dire quelques mots des diverses projections zénithales dont plusieurs ont déjà été indiquées. Nous avons dit que chaque système était défini par la forme de la fonction F (θ) qui détermine, pour chaque valeur de θ, le rayon ρ de chaque almicantarat. On peut donc imaginer autant de systèmes différents que l'on veut et assujettir la projection à remplir une certaine condition qui déterminera la forme de la fonction F.

Nous avons déjà étudié les projections perspectives pour lesquelles

$$\rho = \frac{a\,\mathrm{D}\sin\theta}{\mathrm{D} + a\cos\theta},$$

formule dans laquelle D représente la distance du point de vue au plan de projection supposé mené par le centre de la sphère perpendiculairement au diamètre qui passe par le point de vue. Nous avons indiqué au § 20 du chapitre IV la construction qui permettra de tracer les méridiens et les parallèles à l'aide d'un canevas *type* tel que la projection stéréographique sans avoir besoin de connaître les valeurs de l'arc θ pour les points que l'on voudra reporter.

5. Revenons à la formule générale

$$\rho = \mathrm{F}(\theta).$$

La forme la plus simple que nous puissions donner à ρ est évidemment

$$\rho = \theta;$$

le rayon de chaque almicantarat est égal à l'arc de grand cercle qui, sur la sphère, joint le centre de la surface à représenter au petit cercle correspondant, les distances de ce centre aux différents points de la carte sont ainsi représentées en véritable grandeur. Si le pôle lui-même est pris pour centre, les parallèles de la projection ont pour rayons les différentes valeurs de

$$a\,(90^\circ - l)\,\frac{\pi}{180}.$$

Cette projection, imaginée par ***Guillaume Postel*** (de Dolérie près Avranches) qui ne l'employa que sous l'aspect polaire dans la mappemonde publiée en 1581 (1), fut étudiée comme projection zénithale d'abord par Lambert en 1772 (2), puis avec plus de détails, en 1799, c'est-à-dire vingt-sept ans après, par *Antonio Cagnoli*, membre de la Société italienne, qui crut l'avoir inventée et lui donna son nom (3); nous la désignerons sous le nom de *projection zénithale équidistante*.

Il est facile de voir que, tant que la valeur de θ n'excède pas 30°, les degrés des almicantarats sont peu altérés et conservent par conséquent à peu près leur véritable rapport avec ceux qui mesurent leur distance au centre de la projection.

Exprimons les rayons de la sphère et des différents cercles en degrés : nous pourrons écrire (fig. 43)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29};$$

or

$$ef = AB\sin\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{e'f'}{A'B'} = \frac{\theta}{90};$$

donc

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{90}{57,29} = \frac{\dfrac{90e'f'}{\theta}}{\dfrac{ef}{\sin\theta}};$$

(1) *Polo aptata nova charta universi, auth.* Guil° POSTELLO. *Voir* au dépôt de la marine l'édition de 1621.

(2) LAMBERT, § 99, p. 179.

(3) A. CAGNOLI, *Della più esatta costruzzione delle carte geografiche* (dans les *Memorie di Mathematica e Fisica della Societa Italiana*, t. VIII, Modène 1799, in-4, p. 658 à 664.

d'où

$$\frac{e'f'}{ef} = \frac{\theta}{57{,}29 \sin\theta}.$$

Ce rapport tend vers l'unité lorsque θ diminue ; quand θ est égal à 30°, ce rapport est égal à $\frac{60}{57{,}29}$, ce qui montre que les degrés de la projection sont un peu plus petits que ceux qui leur correspondent sur la sphère, mais en diffèrent très-peu. Si donc on n'étend pas cette projection à plus de 30 degrés du centre, on pourra considérer les distances perpendiculaires aux directions centrales comme conservées aussi bien que les distances le long de ces directions, et dresser une échelle de parties égales suffisante pour de petites distances.

Lorsque le point central est pris sur l'équateur, les degrés sont conservés sur la ligne des pôles et sur l'équateur ; et, sur la circonférence qui limite un hémisphère, ils sont aussi égaux entre eux ; mais les parallèles et les méridiens ne sont ni des ellipses comme dans les projections perspectives de la Hire et de Parent, ni des arcs de cercle comme dans la projection dite *globulaire* dont nous parlerons plus tard (1), et avec laquelle on a confondu à tort la projection zénithale équidistante.

Sous l'aspect polaire elle est très-employée pour les cartes célestes, et, au *bureau des longitudes*, pour les cartes des éclipses publiées chaque année dans la *Connaissance des temps*. Les projections nos XXVIII, XXIX et XXX représentent un hémisphère sous les trois aspects polaire, méridien et horizontal.

6. Si nous prenions pour plan de projection, dans la sphère stéréographique, non plus un grand cercle, mais le plan tangent à la sphère à l'extrémité du diamètre dont l'autre extrémité est le point de vue (2), nous aurions, pour exprimer les rayons des almicantarats,

$$\rho = 2 \tang \frac{\theta}{2}.$$

D'un autre côté, la projection zénithale équidistante peut se représenter par la formule

(1) *Voir* 2e part., ch. XIV, 2°.

(2) C'est ce qu'il faut faire lorsque l'on veut éviter l'altération au centre de la carte et la reporter sur les bords, car les degrés au centre se trouvent alors conservés, tandis qu'à 90° ils sont presque doublés.

$$\rho = \theta = \infty . \operatorname{tang} \frac{\theta}{\infty}.$$

Le premier système a l'avantage de ne pas altérer les angles, et le second d'exagérer les surfaces beaucoup moins que le premier. Si donc on considère des systèmes ayant des formules analogues et en quelque sorte intermédiaires, telles que

$$\rho = 3 \operatorname{tang} \frac{\theta}{3}, \qquad \rho = 4 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4} \ldots\ldots,$$

dans chacun d'eux il y aura déformation, mais aussi l'exagération sera moindre que dans la projection stéréographique.

7. Nous avons déjà parlé (1) d'une projection zénithale qui possède la propriété très-importante de conserver les surfaces dans leur véritable grandeur. On arrive directement à sa formule en exprimant que les zones formées sur la sphère par les almicantarats sont respectivement égales aux surfaces qui les représentent :

$$2\pi a^2(1 - \cos\theta) = \pi\rho^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2};$$

le rayon de chaque almicantarat est donc égal à la corde de l'arc vertical correspondant.

Nous reviendrons longuement sur ce système, l'un des plus importants à cause de ses propriétés.

8. Nous allons maintenant parler d'un nouveau système imaginé par l'astronome anglais *Airy*, qui lui a donné le nom de ***Projection by Balance of Errors*** (2).

Nous avons déjà dit que toutes les cartes, quel que fût leur système de projection, étaient entachées de l'une au moins des deux erreurs, exagération des surfaces et déformation ; nous allons nous occuper d'évaluer ces deux erreurs dans les projections zénithales en suivant la méthode imaginée par M. *Airy*.

(1) *Voir* chap. III, § 14, et 2[e] part., chap. IX, Projection équivalente zénithale de Lambert.

(2) *Explanation of a projection by Balance of Errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface; and comparison of this projection with other projections, by* G. B. AIRY, *esq. astronomer royal : communicated by the author*; dans le *Philosophical Magazine*, cahier de décembre 1861, p. 409 à 421.

Supposons pour cela la surface sphérique décomposée en une infinité de petits rectangles formés par les arcs de deux almicantarats et de deux cercles azimutaux infiniment voisins; la carte sera de même décomposée en une infinité de petits rectangles curvilignes compris entre deux circonférences et deux rayons infiniment voisins; chaque rectangle de la sphère aura ainsi son correspondant sur la carte. Soient a et b la longueur et la largeur de l'un de ces petits rectangles de la sphère dont nous prenons le rayon pour unité; la longueur et la largeur du petit rectangle correspondant de la carte, étant des fonctions de a et b, pourront être représentées par $a + \delta a$ et $b + \delta b$.

Si les rectangles de la carte étaient régulièrement égaux à ceux de la sphère, le rapport de l'aire projetée à l'aire originale serait égal à l'unité; s'il n'en est pas ainsi le changement de surface pour chaque rectangle pourra être représenté par

$$\frac{\text{aire projetée}}{\text{aire horizontale}} - 1.$$

Si chaque rectangle était semblable à celui auquel il correspond, la déformation serait nulle, les angles ne seraient pas altérés, et le rapport des côtés projetés divisé par le rapport des côtés originaux donnerait un quotient égal à l'unité; s'il n'en est pas ainsi, la déformation pour chaque rectangle pourra être exprimée par la différence de ce quotient à l'unité, c'est-à-dire par

$$\frac{\text{long}^{\text{r}}\ \text{projetée} \times \text{larg}^{\text{r}}\ \text{originale}}{\text{larg}^{\text{r}}\ \text{projetée} \times \text{long}^{\text{r}}\ \text{originale}} - 1.$$

Par suite des notations que nous avons adoptées nous pourrons représenter l'erreur sur chaque surface de rectangle par

$$\frac{(a + \delta a)(b + \delta b)}{ab} - 1 = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b},$$

et la déformation par

$$\frac{a + \delta a}{b + \delta b} \cdot \frac{b}{a} - 1 = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b},$$

en négligeant les puissances de δa et δb au-dessus de la première.

M. Airy a cherché comment on pouvait évaluer l'erreur totale produite sur la projection tant par l'exagération des surfaces que par la déformation, erreur résultante que nous avons déjà désignée

par le mot *altération* et à laquelle les Anglais donnent le nom bien plus expressif de *misrepresentation.* Le savant astronome a cherché en outre quel était le système zénithal dans lequel le résultat de la combinaison des deux erreurs était le plus avantageux possible, et il a basé ses calculs sur les suppositions et les déductions suivantes :

1° ces deux erreurs partielles, lorsqu'elles sont de même amplitude, peuvent être considérées comme des fautes égales ;

2° comme l'erreur produite par une valeur négative est la même que l'erreur produite par la même valeur prise positivement, on peut employer une puissance quelconque de leur expression et appliquer la méthode des moindres carrés ;

3° cette méthode conduit à chercher, pour chaque élément de surface, le minimum de la somme des carrés des deux expressions ;

4° pour la carte entière on devra donc chercher le minimum de la somme des carrés des erreurs élémentaires considérées en ayant égard à la grandeur de la petite surface correspondante.

La manière de représenter la projection de M. Airy consistera donc à déterminer la forme de la fonction de θ qui, prise pour rayon des almicantarats, rendra minimum l'erreur totale représentée par la somme de toutes les erreurs élémentaires multipliées par la surface qui correspond à chacune d'elles.

La somme des carrés des deux erreurs étant

$$\left(\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta a}{a}-\frac{\delta b}{b}\right)^2,$$

nous pouvons prendre pour *mesure* de l'erreur en chaque point

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2.$$

Appelons θ la longueur, en fonction du rayon pris pour unité, de l'arc de grand cercle qui unit le centre de la carte au centre du petit rectangle que nous avons supposé formé sur la sphère, ρ la distance correspondante sur la carte, φ l'angle azimuthal infiniment petit sous lequel la largeur du rectangle est vue, dans les deux cas, du point pris pour centre. Alors

$$a=\delta\theta; \qquad a+a\delta=\delta\rho; \qquad \delta a=\delta\rho-\delta\theta,$$

$$b=\varphi\sin\theta; \qquad b+\delta b=\varphi\rho; \qquad \delta b=\varphi(\rho-\sin\theta),$$

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2=\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}-1\right)^2.$$

telle est l'expression de l'altération en chaque point. Le produit de cette erreur par la surface $\varphi \sin\theta\, \delta\theta$ à laquelle elle correspond est donc

$$\left[\left(\frac{\delta\rho}{\delta\theta}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}-1\right)^2\right]\sin\theta d\theta,$$

en négligeant le multiplicateur φ.

La sommation des erreurs partielles pour toute la carte est donc représentée par

$$\int_0^\beta\left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}-1\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}-1\right)^2\right]\sin\theta d\theta,$$

en désignant par β la valeur de θ à la limite de la carte ; et c'est cette intégrale entre les limites 0 et β assignées à la variable θ qui doit être rendue *minimum*.

Posons $\rho-\theta=y$ et substituons en remplaçant $\frac{dy}{d\theta}$ par p. L'intégrale à rendre minimum a alors pour expression

$$\int_0^\beta d\theta\left[p^2\sin\theta+\frac{(y+\theta-\sin\theta)^2}{\sin\theta}\right]=\int_0^\beta V d\theta.$$

C'est un cas du *calcul des variations*.

Posons

$$M=\frac{dV}{d\theta};\quad N=\frac{dV}{dy};\quad P=\frac{dV}{dp}=2p\sin\theta.$$

Nous devons donner à y une variation assujettie à la condition que dy soit nul quand $\theta=0$; les équations de solution sont alors

$$N=\frac{dP}{d\theta}=0,\quad \text{et}\quad P_\beta=0,$$

en désignant par P_β la valeur de $2p\sin\theta$ quand on y remplace θ par β. Or

$$N=\frac{2(y+\theta-\sin\theta)}{\sin\theta};\quad \frac{dP}{d\theta}=\frac{2d^2y}{d\theta^2}\sin\theta+\frac{2dy}{d\theta}\cos\theta;$$

la première équation devient donc

$$\frac{y+\theta-\sin\theta}{\sin\theta}-\sin\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}-\cos\theta\frac{dy}{d\theta}=0,$$

ou

$$\sin^2\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{dy}{d\theta}-y=\theta-\sin\theta.$$

Écrivons Θ à la place de $\theta - \sin\theta$, et pour résoudre l'équation posons

$$z = \sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y.$$

Nous avons alors, en différentiant et en substituant,

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \sin^2\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{dy}{d\theta} - y,$$

ou

$$\sin\theta \frac{dz}{d\theta} - z = \Theta.$$

Cette équation est intégrable quand elle est multipliée par $\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

On obtient alors

$$z = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}};$$

donc

$$\sin\theta \frac{dy}{d\theta} + y = \frac{1}{2}\tang\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Cette dernière équation devient intégrable quand on la multiplie par $\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$; on obtient alors

$$y = \frac{1}{4}\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2}\int d\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\int d\theta \frac{\Theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

En posant pour un moment $\frac{\theta}{2} = \psi$, on peut écrire

$$y = \operatorname{cotang}\psi \int d\psi \frac{\sin\psi}{\cos^3\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\psi\cos\psi}\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\operatorname{cotang}\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi\cos^2\psi},$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\tang\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\sin^2\psi} - \frac{1}{2}\operatorname{cotang}\psi\int d\psi \frac{\Theta}{\cos^2\psi}.$$

En remplaçant θ par $\theta - \sin\theta$, on obtient enfin

$$y = -\theta - 2\,\text{cotang}\,\frac{\theta}{2}\,\log\cos\frac{\theta}{2} + C\,\text{tang}\,\frac{\theta}{2} + C'\,\text{cotang}\,\frac{\theta}{2},$$

y doit être nul avec θ, donc $C' = 0$.

L'équation de condition $P_\beta = 0$ peut s'écrire

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_\beta = 0;$$

on doit donc avoir

$$\text{coséc}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\,C\,\text{séc}^2\frac{\beta}{2} = 0;$$

d'où

$$C = \text{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\text{séc}^2\frac{\beta}{2} = -2\,\text{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Il en résulte que, au centre de la carte où $\theta = 0$,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 = \frac{1+C}{2} \quad (1).$$

On a donc définitivement

$$\rho = -2\,\text{cotang}\,\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} + \text{tang}\,\frac{\theta}{2}\,\text{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\text{séc}^2\frac{\beta}{2},$$

expression dans laquelle les logarithmes sont népériens; en appelant donc M le module 0,43429448, on aura, en logarithmes vulgaires,

$$\rho = -\frac{2}{M}\,\text{cotang}\,\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2} - \frac{2}{M}\,\text{tang}\,\frac{\theta}{2}\,\text{cotang}^2\frac{\beta}{2}\log\cos\frac{\beta}{2}.$$

Le rayon-limite de la carte est

---

(1) M. Airy, négligeant la condition de rendre minimum l'intégrale de $V d\theta$ entre les limites 0 et β, et cherchant seulement le minimum de l'intégrale indéfinie, s'était donné, pour déterminer la constante C, la condition que $\frac{dy}{d\theta}$ fût nul ainsi que y, pour $\theta = 0$, ce qui revient à cette condition que les parties centrales de la carte correspondent exactement à la région de la sphère qui entoure le point pris pour centre de projection; M. Airy trouvait ainsi $C = 1$ et finalement

$$\rho = \text{tang}\,\frac{\theta}{2} + 2\,\text{cotang}\,\frac{\theta}{2}\log\sec\frac{\theta}{2}.$$

Le capitaine Clarke, chargé par le colonel James de revoir les calculs de l'astronome anglais, détermina la constante comme nous l'avons fait (*Philosophical magazine*, avril 1862, p. 306-308).

$$R = 2C \tang \frac{\beta}{2}.$$

Cette quantité ne croît pas indéfiniment, mais est maximum quand $\beta = 126°, 24', 53''$; pour des valeurs plus grandes de β, R diminue.

Il ne faut pas oublier que dans nos calculs nous avons pris le rayon de la sphère pour unité, de sorte que si l'on exprime en réalité ce rayon par a, il faut multiplier par a les valeurs de ρ et R trouvées précédemment. Quand $\beta = 120°$, $R = 1{,}6007\, a$; quand $\beta = 113° 20'$, $R = 1{,}5760$.

La projection n° XXIII est construite à l'aide de ces formules sur l'horizon du lieu situé à 23° 30′ de latitude N. (tropique du cancer). Nous dirons au paragraphe suivant pourquoi ce point a été choisi.

9. Nous allons maintenant parler de la projection imaginée par le colonel *Henri James*, directeur de l'*Ordnance Survey*, en cherchant à représenter un hémisphère en projection perspective de manière que l'altération totale (*misrepresentation*) fût la moindre possible (1). Il est arrivé ainsi à placer le point de vue à une distance de la surface qui diffère si peu de la moitié du rayon que cette valeur lui a paru la meilleure à adopter dans la pratique à cause de la simplicité de sa définition. Ainsi

$$D = 1{,}50a,$$

au lieu de 1,595 valeur adoptée par la IIre. Le colonel James voulant appliquer cette projection à la représentation d'une partie de la surface de la terre plus grande qu'un hémisphère, au lieu de faire coïncider le plan du tableau avec un grand cercle de la sphère, l'a supposé parallèle à l'écliptique et passant par la limite des tropiques, c'est-à-dire à une distance du centre du globe égale à $a \sin 23° 30'$; le rayon de la circonférence qui limite la carte est alors égal à $a \cos 23° 30'$, c'est-à-dire à $0{,}91706\, a$, et des longueurs égales de la surface sphérique ne sont, sur les bords de la carte, que de $\frac{1}{6}$ plus grandes que vers le milieu,

Le colonel James a choisi cette distance et cette position du ta-

(1) *New geometrical Projection of two-thirds of a sphere*, article compris dans la section *Useful Inventions* de l'*Address to the Royal Geographical Society of London delivered at the Anniversary meeting, on the 25th may* 1857 *by Sir R. J.* MURCHISON, p. 421-422 des *Proceedings*, vol. I, Londres 1857, in-8, ou p. CXLI-CXLII du Journal, vol. XXVII, Londres 1857, in-8.

bleau parce que, en plaçant, comme il l'a fait dans les cartes dessinées dans ce système par J. O. *Jarrels*, le point central sur le tropique du Cancer (23° 30′ N.) et à 15° (long E. de Greenwich, 12° 40′ de Paris) on peut représenter dans le cercle de projection l'Europe, l'Asie, l'Afrique et l'Amérique ; enfin il a donné à ce système le nom de projection des deux tiers du globe quoique la surface représentée soit en réalité les $\frac{7}{10}$ de la surface totale.

10. Ce système ainsi défini ne jouit réellement de tous ses avantages que jusqu'à 90° du centre ; mais en étendant la projection de 90° à 113° 30′ comme l'a fait sir H. James, le capitaine A. R. *Clarke* (1) a montré que le point de vue devait être placé à une distance de la surface égale aux $\frac{11}{80}$ du rayon au lieu de $\frac{13}{30}$. Voici le calcul tel qu'il a été présenté par l'auteur.

Prenons le rayon de la sphère pour unité : appelons D la distance de l'œil au centre, D′ celle du tableau au centre; l'expression générale du rayon ρ des almicantarats sera

$$\rho = \frac{D' \sin\theta}{D + \cos\theta};$$

comme elle contient deux quantités arbitraires D et D′, nous pouvons en disposer pour rendre minimum l'altération totale de la carte pour toutes les valeurs de θ comprises entre 0 et 113° 30′. Nous avons vu précédemment que cette altération pouvait être exprimée par

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta} - 1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta = \int_0^\beta V \sin\theta d\theta.$$

Remplaçons donc $\frac{d\rho}{d\theta}$ par sa valeur $\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}$ et ρ par $\frac{D' \sin\theta}{D + \cos\theta}$, et nous aurons à rendre minimum par rapport à D et D′ l'intégrale

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{D'}{D + \cos\theta} - 1\right)^2\right] \sin\theta d\theta = M.$$

L'intégration donne

$$M = D'^2 \Delta_1 + 2 D' \Delta_2 + 4 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

(1) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, by Col. H.* James, *and Cap. A. R.* Clarke *: communicated by the authors;* dans le *Philosophical Magazine*, cahier d'avril 1862, p. 306 à 312.

où les symboles Δ_1, Δ_2 sont

$$\Delta_1 = \frac{1+D^2}{N} = \frac{D(D^2-1)}{N^2} + \frac{(D^2-1)^2}{3N^3} - \frac{1}{3}\frac{(1-D)^2}{1+D} - 1,$$

$$\Delta_2 = (1+D)\log\frac{N}{1+D} + \frac{D^2-1}{N} - D + 1,$$

et

$$N = D + \cos\beta.$$

La condition du minimum exige que

$$\frac{dM}{dD'} = 0, \quad \text{et que} \quad \frac{dM}{dD} = 0,$$

donc

$$D'\Delta_1 + \Delta_2 = 0, \quad \text{et} \quad \frac{D'd\Delta_1}{dD} + 2\frac{d\Delta_2}{dD} = 0;$$

d'où

$$D' = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad \text{et} \quad \Delta_2\frac{d\Delta_1}{dD} - 2\Delta_1\frac{d\Delta_2}{dD} = 0.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de M, nous trouvons

$$M = 4\sin^2\frac{\beta}{2} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1},$$

expression qui ne contient plus que D; cette variable doit donc être déterminée de manière que $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ soit maximum.

On y parvient très-facilement en calculant les valeurs de $\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1}$ pour des valeurs données de D. On forme ainsi le tableau suivant :

D	$\log\Delta^2_2 - \log\Delta_1$
1,35	0,420732
1,36	0,420756
1,37	0,420762
1,38	0,420747
1,39	0,420665

En interpolant on trouve pour le minimum

$$D = 1,36763; \quad \log\Delta^2_2 - \log\Delta_1 = 0,4207623,$$

$$\frac{\Delta^2_2}{\Delta_1} = 2,634889; \quad M = 0,16261.$$

Le point de vue est ainsi aux $\frac{11}{30}$ environ du rayon de la surface de la sphère. L'expression du rayon des almicantarats est alors

$$\rho = \frac{1,66261\ a \sin\theta}{1,36763 + \cos\theta},$$

Quand $\theta = 113°\ 30'$, le rayon de la circonférence-limite devient

$$R = 1,5737,$$

qui diffère très-peu du rayon de la projection de M. Airy (*Balance of Errors*, corrigée par Sir Clarke).

La table suivante, qui donne les valeurs de ρ pour les valeurs de θ de 5° en 5° dans l'hypothèse de $a = 1$, a été calculée par le capitaine Clarke en prenant le rayon a pour unité. La projection n° XXII a été dressée dans ce système.

Ce genre de projection perspective convient assez bien pour représenter de grandes masses de terres et pour le tracé des cartes physiques ou géologiques ; pour les grandes cartes d'étoiles il doit être préféré à la projection stéréographique parce qu'il permet de représenter sans erreur exagérée sur les bords une grande partie du ciel, mais il ne possède pas l'importante propriété de conserver les angles et de représenter les constellations sans en altérer les formes.

Valeurs de $\rho = \frac{1,66261 \sin\theta}{1,36763 + \cos\theta}$.

θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ	θ	ρ
0	0,0000	30	0,3722	60	0,7710	90	1,2157
5	0,0613	35	0,4301	65	0,8417	95	1,2935
10	0,1227	40	0,5009	70	0,9138	100	1,3713
15	0,1844	45	0,5666	75	0,9874	105	1,4484
20	0,2464	50	0,6335	80	1,0623	110	1,5233
25	0,3090	55	0,7010	85	1,1385	115	1,5945

11. Nous allons maintenant étudier les altérations que les projections zénithales font subir sur la carte aux angles, aux éléments de longueur et par suite aux surfaces.

Nous supposerons la projection faite sous l'aspect polaire avec le pôle au centre et les parallèles circulaires et concentriques ; mais,

comme un point quelconque de la sphère peut toujours être pris comme centre de la projection, ce que nous dirons des parallèles et des méridiens de la projection polaire pourra toujours s'appliquer aux almicantarats et aux cercles azimutaux relatifs à une position quelconque du centre.

ALTÉRATION DES ANGLES.

Considérons sur la sphère une direction quelconque faisant un angle α avec un méridien, et cherchons l'angle correspondant β de la carte, c'est-à-dire l'angle que fera avec le méridien de la projection la direction qui, sur la carte, correspond à la direction considérée sur la sphère. Appelons z l'azimut du sommet de l'angle.

Nous aurons évidemment sur la sphère

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dz}{d\theta}\sin\theta,$$

et sur la carte

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho}{d\rho}\,dz.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}\operatorname{tang}\alpha = \mathrm{K}\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\beta-\alpha) = \frac{(\mathrm{K}-1)\operatorname{tang}\alpha}{1+\mathrm{K}\operatorname{tang}^2\alpha},$$

en posant

$$\mathrm{K} = \frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons d'abord que le rapport K et par suite l'altération $\beta-\alpha$ sont indépendants de l'azimut du sommet de l'angle, et restent par conséquent les mêmes pour des distances égales du centre de la projection.

Cette relation permet de tracer la rose des vents en un point quelconque de la carte, puisque, connaissant la loi

$$\rho = \mathrm{F}(\theta)$$

qui la définit, on pourra calculer, pour toute valeur de θ, la fonction

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}.$$

Remarquons de suite que $\beta = \alpha$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce que nous savions déjà puisque les almicantarats et les cercles azimutaux se coupent à angles droits sur la carte comme sur la sphère.

Cherchons maintenant le maximum $B - A$ de l'altération $\beta - \alpha$ pour chaque valeur de θ; il nous suffira pour cela d'égaler à zéro la dérivée de la valeur de tang $(\beta - \alpha)$, en considérant α comme la véritable indépendante :

$$\frac{K-1}{\cos^2\alpha}(1+K)\tang^2\alpha) - \frac{2K(K-1)}{\cos^2\alpha}\tang^2\alpha = 0,$$

ou

$$1 - K\tang^2\alpha = 0,$$

d'où

$$\tang A = \pm\frac{1}{\sqrt{K}} = \pm\sqrt{\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}}.$$

Les deux directions qui, sur la sphère, font entre elles l'angle le plus altéré A sont donc symétriques de part et d'autre du méridien. Il en est de même des directions qui leur correspondent sur la carte, car, en remplaçant tang α par ces valeurs, on obtient :

$$\tang B = \pm\sqrt{K} = \frac{1}{\tang A},$$

équation qui conduit à poser

$$A + B = \frac{\pi}{2},$$

en excluant les arcs négatifs et ceux qui excèdent $\frac{\pi}{2}$. On déduit de là pour la déviation maximum :

$$\tang(B - A) = \frac{K-1}{2\sqrt{K}} = \frac{\rho d\theta - d\rho\sin\theta}{2\sqrt{\rho d\theta d\rho \sin\theta}},$$

ce qui montre que, au centre où $\theta = 0$ et $\rho = 0$, l'altération est toujours nulle.

Si nous voulons chercher la projection pour laquelle cette altération est partout nulle, il suffit d'égaler K à 1 :

$$\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\rho} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \text{et par conséquent} \quad \rho=\operatorname{tang}\frac{\theta}{2};$$

c'est la loi de la projection stéréographique.

12. Pour terminer l'étude de l'altération des angles dans les projections zénithales, remarquons que, en tout point de la sphère ou de la carte, il existe une infinité de groupes de deux directions faisant entre elles le même angle sur la carte ou sur la sphère. M. Collignon a donné aux directions qui possèdent cette propriété le nom de *directions conjuguées.*

Soient α et α_1 les angles formés en un point M de la sphère par deux directions avec l'arc de grand cercle qui joint ce point à celui qui est pris pour centre de la projection; soient β et β_1 les angles correspondants sur la carte. Les directions conjuguées seront définies par l'équation

$$\alpha_1-\alpha=\beta_1-\beta \quad \text{ou bien} \quad \beta-\alpha=\beta_1-\alpha_1,$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang}\beta-\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\alpha}=\frac{\operatorname{tang}\beta_1-\operatorname{tang}\alpha_1}{1+\operatorname{tang}\beta_1\operatorname{tang}\alpha_1}.$$

Connaissant la distance θ du point M au centre, on pourra remplacer tang β et tang β_1 par leurs valeurs en fonction de θ et de tang α ou tang α_1; on obtiendra ainsi la relation qui doit exister entre α et α_1 sur la sphère pour que les directions définies par ces angles soient des directions conjuguées. Remplaçons donc tang β par $\frac{\rho\, d\theta}{d\rho \sin\theta}$ tang α; il viendra, après suppression du facteur commun $\frac{\rho\, d\theta}{d\rho\sin\theta}-1$,

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1+K\operatorname{tang}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tang}\alpha_1}{1+K\operatorname{tang}^2\alpha_1},$$

en posant comme précédemment

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho\sin\theta}=K.$$

Cette équation est du second degré par rapport à tang α_1. Elle est satisfaite d'abord par tang α_1 = tang α, ce qui donne $\alpha_1=\alpha$ en faisant abstraction des angles négatifs ou supérieurs à 180 degrés. Sup-

primant cette racine qui ne convient point à la question, il vient pour l'autre racine

$$\tang \alpha_1 = \frac{1}{K \tang \alpha}.$$

Le produit des tangentes des angles α et α_1 étant constant pour un même point M, les directions correspondantes appartiennent aux diamètres conjugués d'une hyperbole tracée sur le plan tangent à la sphère et qui aurait le point M pour centre, la tangente au grand cercle MO pour l'un de ses axes principaux, et dont enfin les asymptotes feraient avec cet axe l'angle dont la tangente est égale à $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Sur la carte les directions conjuguées appartiennent aussi aux diamètres conjugués d'une autre hyperbole ayant le rayon MO pour axe principal et dont les asymptotes font avec MO l'angle dont la tangente est égale à $\sqrt{K}$.

En d'autres termes, sur la carte comme sur la sphère, les asymptotes de l'hyperbole qui définit ces directions conjuguées ne sont autre chose que les directions de déviation maximum que nous avons déterminées tout à l'heure.

De là résulte un moyen géométrique de savoir si l'angle de deux directions MA, MB, sur la projection zénithale, reproduit en vraie grandeur l'angle des directions correspondantes sur la sphère. Par le point M (fig. 44) menons les droites MP, MP' de déviation maximum sous des angles donnés par l'équation

$$\tang B = \pm \sqrt{K} = \pm \sqrt{\frac{\rho\, d\theta}{d\rho \sin\theta}}.$$

Menons ensuite une parallèle AB quelconque à MP'. Si le point I où elle coupe MP est le milieu du segment AB, les deux directions MB et MA sont des diamètres conjugués dans toute hyperbole ayant pour asymptotes MP, MP', et par suite l'angle BMA reproduit en vraie grandeur l'angle formé sur la sphère par les directions correspondantes à MB, MA.

En effet, dans l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la somme des coefficients angulaires de deux diamètres conjugués est égale à zéro.

La dirèction MO est conjuguée avec une direction perpendiculaire

à MO au point M. La construction indique cette particularité que nous avions déjà reconnue.

Ainsi, quoique dans les projections zénithales les angles soient en général altérés, il y a en chaque point une infinité d'angles qui ne subissent aucune altération.

13. Nous allons maintenant appliquer à chacune des projections zénithales que nous avons étudiées les résultats auxquels nous sommes parvenus, et calculer les valeurs de K et de l'angle le plus altéré A ainsi que l'altération maximum B — A. Nous supposerons le rayon de la terre pris pour unité.

Nous avons trouvé, pour expression du rayon des almicantarats, dans les projections perspectives

$$\rho = \frac{D \sin\theta}{D + \cos\theta}.$$

Il en résulte

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{D + \cos\theta}{D\cos\theta + 1}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{D\cos\theta + 1}{D + \cos\theta}}, \quad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{(D - 1)(1 - \cos\theta)}{2\sqrt{(D + \cos\theta)(D\cos\theta + 1)}}.$$

La position du plan du tableau ne peut évidemment exercer d'influence sur les résultats.

Dans la projection de sir James D = 1,50

$$K = \frac{1{,}50 + \cos\theta}{1{,}50\cos\theta + 1}; \quad \operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1{,}50 + \cos\theta}{D + \cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}25(1 - \cos\theta)}{\sqrt{(1{,}50 + \cos\theta)(1{,}50\cos\theta + 1)}}.$$

On voit que, à 90° du centre, l'angle le plus altéré sur la sphère est de 39° 14′ environ; il est représenté sur la carte par une angle de 50° 46′; l'altération est de 11° 32′.

Dans la projection de sir James, modifiée par le capitaine Clarke, D = 1,36763 et par conséquent

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{0{,}36763(1 - \cos\theta)}{2\sqrt{(1{,}36763 + \cos\theta)(1{,}36763\cos\theta + 1)}}.$$

A 90° du centre l'altération maximum n'est que de 8° 56′. Elle est de

13° 15′ dans la première projection de Parent où $D = 1{,}595$, de 15° 32′ dans la seconde où $D = 1{,}732$.

Dans la projection orthographique $\rho = \sin\theta$,

$$K = \frac{1}{\cos\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\cos\theta}; \qquad \operatorname{tang} B = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}};$$

$$\operatorname{tang}(B - A) = \frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

On voit que l'altération, nulle au centre, va en croissant avec θ et que, à la circonférence de la carte, pour $\theta = 90°$, elle est de 90 degrés : quant à l'angle A le plus altéré sur la sphère, il est de 45° au centre et décroît jusqu'à zéro.

Dans la projection centrale $\rho = \operatorname{tang}\theta$,

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{d\rho} = \cos\theta;$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(B - A) = -\frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} = -\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta}}.$$

L'altération est donc égale, mais de signe contraire à celle de la projection orthographique.

Dans la projection équidistante $\rho = \theta$

$$K = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{\sin\theta}{\theta}}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{\theta - \sin\theta}{2\sqrt{\theta\sin\theta}}.$$

Au centre $\theta = 0$ et le rapport $\frac{\sin\theta}{\theta}$ est égal à l'unité; donc $A = \pm 45°$ et $B = \pm 45°$; la déviation est nulle; l'angle A de déviation maximum décroît ensuite jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors $\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ou $A = 38°\,35'\,10''$, tandis que B décroît jusqu'à 51° 24′ 50″; la déviation maximum est donc de 12° 49′ 40″.

Dans les projections que nous avons indiquées sous le nom de

projections intermédiaires, $\rho = n \operatorname{tang} \frac{\theta}{n}$, l'altération maximum croît avec n; quand $n = 3$, elle est de 7° 28′ 30″ à 90° du centre, et l'angle A est de 41° 15′ 45″; quand $n = 4$, à la même distance l'altération B—A est de 9° 52′ 44″ et l'angle A de 40° 3′ 38″.

Dans la projection zénithale équivalente de Lambert, $\rho = 2 \sin \frac{\theta}{2}$; on trouve alors

$$K = \frac{\rho}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$$\operatorname{tang} A = \pm \cos \frac{\theta}{2}; \qquad \operatorname{tang}(B - A) = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

L'angle A est égal à 45° pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au centre de la carte; il décroît ensuite sur la sphère tandis que l'angle B augmente d'autant, et la déviation va en croissant; quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\operatorname{tang} A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou A = 35° 15′ 52″, et la déviation maximum est de 19° 28′ 16″; elle continue à croître avec θ, et, à l'antipode du centre, lorsque $\theta = 180°$, on trouve A = 0 et B = 90°.

Dans la projection de sir Airy (*Balance of Errors*)

$$\rho = -2 \operatorname{cotang} \frac{\theta}{2} \log\cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{cotang}^2 \frac{\beta}{2} \log \operatorname{séc}^2 \frac{\beta}{2}\right),$$

et l'on peut calculer A et B pour chaque valeur de θ.

ALTÉRATION DES LONGUEURS.

11. Sur la sphère la distance des deux points définis par les coordonnés z et θ, $z + dz$ et $\theta + d\theta$ qui désignent l'une l'azimut et l'autre la distance au centre est exprimée par

$$\sqrt{\sin^2\theta\, dz^2 + d\theta^2};$$

la distance correspondante sur la carte zénithale par

$$\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}.$$

Soit m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en chaque

point avec l'orientation de l'élément considéré, ou avec le rapport $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ que nous avons reconnu être égal à la tangente de l'angle α que fait cet élément avec le méridien. On peut donc écrire

$$d\rho^2 + \rho^2 dz^2 = m^2(\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2).$$

Cherchons la valeur de α qui rend m maximum ou minimum en un point donné.

Nous pouvons écrire, en remplaçant $\frac{dz}{d\theta}\sin\theta$ par tang α,

$$m^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 dz^2}{\sin^2\theta dz^2 + d\theta^2} = \frac{\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\frac{dz^2}{d\theta^2}}{1 + \tang^2\alpha} = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondant à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, la somme des deux valeurs de m^2 sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m_1^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\theta};$$

et pour l'autre

$$m_2^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin^2\alpha_1 + \rho^2\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\theta}.$$

Donc

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta},$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage plus tard.

La valeur de α qui rend m ou m^2 maximum ou minimum s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de

$$\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta},$$

prise par rapport à la variable α;

$$-2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2\rho^2}{\sin^2\theta}\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ou

$$\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right) = 0.$$

Cette équation nous montre que les deux directions pour lesquelles m est maximum ou minimum sont données par les valeurs de α égales à 0 ou à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire coïncidant l'une avec l'almicantarat et l'autre avec le rayon.

Pour reconnaître celle des deux qui correspond au maximum, prenons la dérivée seconde de m^2 :

$$\cos 2\alpha \left(\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right),$$

et cherchons son signe pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Supposons d'abord que $\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ soit positif, ce qui signifie

$$\frac{d\rho}{\rho} < \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

Nous pouvons intégrer les deux membres et comme, dans les projections que nous considérons, ρ devient nul en même temps que θ, nous pouvons écrire

$$\log\rho < \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

$$\rho < \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

Supposons donc cette condition satisfaite, soit par la nature même de la projection, soit par une série de valeurs de θ; le signe de la dérivée seconde de m^2 dépendra alors du signe de $\cos 2\alpha$. Pour $\alpha=0$, cette dérivée sera positive; elle sera négative pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; il en résulte que m^2, et par conséquent m, sera minimum pour la première valeur, maximum pour la seconde.

Si le terme $\frac{\rho^2}{\sin^2\theta} - \frac{d\rho^2}{d\theta^2}$ est négatif, et par suite si, dans la projection ou pour les valeurs de θ considérées, on a

$$\rho > \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

c'est le contraire qui a lieu; le rapport m sera alors maximum pour

$\alpha = 0$, c'est-à-dire sur le rayon, et minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sur l'almicantarat.

On voit de plus que le seul système dans lequel le rapport des distances est indépendant de l'angle α, c'est-à-dire reste le même dans toutes les projections (tout en variant avec θ), est la projection pour laquelle

$$\frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \tang\frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire la projection stéréographique.

Cherchons les valeurs maximum ou minimum du rapport m; il suffit pour cela de faire $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression générale de m^2

$$m^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\sin^2\alpha.$$

On trouve ainsi que, sur le rayon, ce rapport m_0 est égal à $\frac{d\rho}{d\theta}$, et que, sur l'almicantarat, $m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta}$.

Le rapport des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est évidemment le produit $m_0\, m_{\frac{\pi}{2}}$ des rapports maximum et minimum des distances élémentaires au point considéré. Si l'on considère, en effet, sur la sphère, un petit carré ayant l'unité pour chacun de ses côtés supposés d'ailleurs dirigés suivant le méridien et suivant le parallèle, sa surface sera exprimée par l'unité et le quadrilatère correspondant sur la carte aura pour côtés m_0 (suivant le rayon) et $m_{\frac{\pi}{2}}$ (suivant l'almicantarat), et pour surface le produit $m_0\, m_{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi le rapport M^2 des surfaces élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est exprimé par

$$M^2 = \frac{d\rho}{d\theta}\,\frac{\rho}{\sin\theta}.$$

15. De même que nous avons cherché les plus grandes altérations d'angle, nous allons chercher les rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2 pour les diverses projections zénithales que nous avons considérées.

Pour les projections perspectives

$$\rho = \frac{D' \sin\theta}{D + \cos\theta},$$

$$m_\theta = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{D'(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^2}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{\sin\theta} = \frac{D'}{D + \cos\theta},$$

$$M^2 = \frac{D'^2(D\cos\theta + 1)}{(D + \cos\theta)^3}.$$

Dans le cas particulier de la projection stéréographique, si nous prenons pour plan de projection le plan tangent à l'hémisphère que nous voulons représenter, $D' = 2$,

$$m_\theta = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}; \qquad M^2 = \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}.$$

Le rapport m d'agrandissement des longueurs élémentaires reste le même autour de chaque point et ne varie qu'avec θ; ce rapport est égal à l'unité au centre de la carte, et croît du centre à la circonférence où il atteint la valeur 2. Le rapport M d'agrandissement des surfaces croît donc depuis 1 jusqu'à 4.

Dans la projection de sir James, si l'on suppose, comme l'a fait l'auteur, que le plan de projection soit à une distance du centre égale à sin 23° 30′, $D' = 1{,}1012$ et alors, au centre de la carte,

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2{,}270};$$

à 90° de ce centre

$$m_0 = \frac{1}{2{,}043}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1{,}362}; \quad M^2 = \frac{1}{2{,}7825};$$

mais si nous supposons que le plan de projection soit tangent à l'hémisphère que l'on veut représenter, on voit que, au centre, le rapport des longueurs élémentaires de la carte et de la sphère est égal à l'unité ainsi que le rapport des surfaces; c'est du reste ce qui a lieu pour toutes les projections perspectives lorsque l'on suppose le plan du tableau situé à l'extrémité du diamètre passant par le point de vue, car alors, pour $\theta = 0$ et $D' = D + 1$

$$m_0 = m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{D'}{D+1} = 1;$$

cette hypothèse sur la position du plan de projection permettra donc de comparer entre elles les projections perpectives en représentant sans altération les portions voisines du centre et voyant comment l'erreur croît avec la distance à ce centre.

Revenons à la projection de sir James ; si nous voulons l'étendre, comme l'a fait l'auteur, jusqu'à 113° 30′ du centre, nous trouvons, à cette limite,

$$m_0 = \frac{1}{1,201}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = 2,265; \quad M^2 = 1,88.$$

Dans la projection de sir James modifiée par le capitaine Clarke, à la même limite on trouve

$$m_0 = 1,149; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = 2,436; \quad M^2 = 2,799.$$

Dans la première projection de Parent, à 90° du centre,

$$m_0 = 1,03; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = 1,63; \quad M^2 = 1,68.$$

Dans la seconde projection de Parent

$$m_0 = \frac{1}{1,09}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = 1,57; \quad M^2 = 1,44.$$

Dans la projection orthographique, les valeurs générales de m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$ sont

$$m_0 = \cos\theta; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = 1; \quad M^2 = \cos\theta;$$

les almicantarats sont projetés en vraie grandeur, et sur les rayons le rapport d'agrandissement m_0 est égal à l'unité au centre de la projection et décroît jusqu'à la circonférence de la carte où il est nul ; le rapport M^2 passe par les mêmes valeurs ; à 60° du centre les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère.

Dans la projection centrale

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\theta}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\theta}; \quad M^2 = \frac{1}{\cos^3\theta};$$

chacun de ces rapports est égal à l'unité au centre de la projection, et infini pour $\theta = 90°$.

Dans la projection équidistante

$$m_0 = 1; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\theta}{\sin\theta}; \qquad M^2 = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

les rayons conservent leur véritable grandeur, et, sur les almicantarats, le rapport $m_{\frac{\pi}{2}}$, maximum en chaque point, croît depuis le centre où il est égal à l'unité jusqu'à ce que $\theta = 90°$, valeur pour laquelle il est égal à $\frac{\pi}{2} = 1,5708$; si l'on prolonge le carte au delà d'un hémisphère, ce rapport continue à croître jusqu'à l'infini.

Dans la projection zénithale intermédiaire $\rho = 3 \tang \frac{\theta}{3}$

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{3}}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{3 \tang \frac{\theta}{3}}{\sin\theta}; \quad M^2 = m_0 \, m_{\frac{\pi}{2}};$$

les rapports m_0 $m_{\frac{\pi}{2}}$ M^2 sont égaux à l'unité au centre de la projection ; quand θ croît jusqu'à 90°, le premier croît jusqu'à $\frac{4}{3}$ ou 1,333 ; le second jusqu'à $\sqrt{3}$ ou 1,7320, le troisième jusqu'à 2,309.

Dans la projection $\rho = 4 \tang \frac{\theta}{4}$, le rapport m_0 croît depuis 1 jusqu'à 1,171, $m_{\frac{\pi}{2}}$ depuis 1 jusqu'à 1,6568, et enfin M^2 depuis l'unité jusqu'à 1,940.

Dans la projection équivalente zénithale de Lambert

$$m_0 = \cos\frac{\theta}{2}; \quad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}; \quad M^2 = 1;$$

ainsi les longueurs des éléments des rayons sont réduites sur la carte dans le rapport de $\cos\frac{\theta}{2}$ à l'unité et les longueurs des éléments des almicantarats sont augmentées dans le même rapport. Quand θ croît de 0 à 90°, m_0 varie de 1 à $\frac{1}{1,414}$ et $m_{\frac{\pi}{2}}$ de 1 à 1,414.

On calculerait de même les rapports d'agrandissement dans la projection de sir Airy.

COMPARAISON DES PROJECTIONS ZÉNITHALES.

16. Si l'on dressait un tableau des valeurs de l'altération maximum des angles pour des valeurs assez rapprochées de θ, et un autre des rapports m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$ et M^2, on pourrait comparer entre elles les diverses projections zénithales et juger de leur mérite à diverses distances du centre. Mais une pareille comparaison est toute conventionnelle, et les résultats dépendent beaucoup du point de vue auquel on se place et de l'importance que l'on assigne à chacune des quantités qui entrent en comparaison.

On devra d'abord fixer l'échelle de construction de chaque projection et cette première détermination nécessitera une hypothèse sur la valeur du rayon de la circonférence qui devra limiter la carte ou sur la valeur du rayon au point que l'on considérera. Si l'on voulait s'affranchir de l'influence de ce rayon, on devrait supposer que, pour chaque valeur de θ, l'almicantarat coïncide avec le petit cercle correspondant de la sphère, et ne considérer que le rapport d'agrandissement m_0 normal à ce cercle ; il suffirait pour cela de diviser chaque valeur de m_0 par la valeur correspondante de ρ, et de comparer, pour les diverses projections, les quotients correspondants aux mêmes valeurs de θ.

On devra ensuite, en considérant l'usage auquel devra servir la carte, examiner quelles sont les parties où l'une des erreurs inhérentes à chaque projection devra être la moindre possible, et choisir le système qui satisfera le mieux à cette condition d'abord, puis aux autres du problème, sans toutefois exagérer les autres erreurs dans les mêmes parties de la carte ou en d'autres où elles pourraient avoir une influence notable sur le mérite relatif du canevas adopté.

On voit donc qu'il y a le plus souvent dans le choix à faire une question de compensation que l'intelligence du géographe résoudra bien mieux que ne pourraient le faire des règles fixes qui, dans la plupart des cas, ne seraient pas applicables ou ne donneraient pas tous les avantages possibles.

Ce que nous venons de dire à propos des projections zénithales, nous aurons occasion de le répéter plus loin pour un système quelconque de projection. Nous reviendrons alors sur les considérations qui doivent faire préférer l'emploi des projections zénithales qui se

prêtent mieux que toutes les autres à la représentation de la surface entière du globe ou d'un hémisphère.

Ces projections conviennent aussi très-bien pour la construction des cartes particulières, à cause de cette importante propriété que les altérations d'angles, de distances ou de surfaces y sont respectivement égales à égale distance du centre, et peuvent en tout point s'évaluer avec facilité.

Il est facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre lorsque l'on veut construire une carte géographique. Il suffit, comme l'a indiqué Prony (1), de prendre pour rayon de la surface sphérique à représenter une moyenne géométrique entre les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface ellipsoïdale au point choisi pour centre de la projection ; ce rayon aura donc pour valeur

$$R = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\;\frac{a}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= a\left(1-\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{8}e^4\ldots\ldots\right)\left(1+e^2\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda\right)+\ldots\ldots$$

en s'arrêtant aux termes en e^4 et appelant λ la latitude du centre de la projection ;

$$R = a[1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda-\tfrac{1}{8}e^4-\tfrac{1}{2}e^4\sin^2\lambda+e^4\sin^4\lambda+e^6(\ldots\ldots)].$$

ou, plus simplemement, en négligeant les termes en e^4

$$R = a(1-\tfrac{1}{2}e^2+e^2\sin^2\lambda).$$

(1) *Voir* ci-dessus, ch. I, § 4.

CHAPITRE VI.

PROJECTIONS PAR DÉVELOPPEMENT ET LEURS MODIFICATIONS.

1. Nous avons déjà dit que pour que la surface à représenter sur un plan ne subît aucune altération dans les angles et dans les surfaces, il faudrait qu'elle fût développable comme le sont les surfaces coniques et cylindriques. Il est donc naturel, lorsque la portion du sphéroïde à représenter est peu considérable, de l'assimiler à une portion de surface de révolution développable se confondant sensiblement avec elle, de supposer tracés sur la seconde les méridiens et les parallèles suivant une loi qui donnera la plus grande analogie possible aux éléments des deux surfaces et de la développer ensuite sur un plan.

Les projections dont nous allons nous occuper portent le nom de *projections coniques* ou de *projections cylindriques* suivant qu'elles résultent du développement d'un cône ou de celui d'un cylindre.

PROJECTIONS CONIQUES.

2. Imaginons un cône tangent au globe suivant le parallèle qui occupe le milieu de l'espace à représenter, et supposons prolongés jusqu'à ce cône les plans des méridiens et des parallèles; ce tronc de cône, qui diffère d'autant moins de la portion correspondante du globe que la zone à reproduire sera moins étendue en latitude, se trouvera divisé en quadrilatères mixtilignes représentant les quadrilatères curvilignes du sphéroïde et que l'on pourra regarder comme leurs équivalents. Il est bien évident que si nous développons ensuite ce cône tronqué en faisant coïncider l'une de ses génératrices avec une droite destinée à représenter le méridien correspondant de la carte, les parallèles seront représentés par des arcs de circonférences concentriques, et les méridiens par des droites partant toutes

du centre commun qui est le sommet de la surface conique; le parallèle moyen gardera évidemment les longueurs de ses éléments, ce qui permettra de tracer chaque méridien en joignant le sommet aux points correspondants de ce parallèle.

Nous voyons que, par ce procédé, les quadrilatères sont rectangles comme sur la sphère, et que tous les détails situés sous la même latitude sont comparables, mais que des différences égales de latitudes sont représentées par des distances qui diminuent de plus en plus en allant du parallèle moyen vers le pôle et augmentent en se dirigeant de ce parallèle vers l'équateur. En outre, les différences de longitudes sont toutes plus grandes sur la surface conique que sur la sphère, excepté sur le parallèle moyen dont les degrés conservent leur véritable grandeur.

Pour que les latitudes ne soient pas altérées, on a imaginé de porter, à partir de l'intersection du méridien du milieu et du parallèle moyen sur ce méridien (fig. 45), des longueurs Mb', Ma'... égales aux arcs MB, MA du méridien rectifié, de manière à espacer également les parallèles du cône comme ils le sont sur la surface de la sphère; puis de prendre les distances Sb', Sa'... pour rayons des projections des parallèles. Ces projections sont exprimées par des arcs ponctués sur la fig. 2; il n'y a plus par ce moyen d'erreur en latitude, et les distances en longitude sont déjà moins grandes que précédemment, comme l'indique la comparaison des arcs pleins et des arcs ponctués sur la même figure.

Quoique ce que nous venons de dire suffise pour tracer la projection conique, nous allons, pour plus de précision, appliquer le calcul à la construction.

Supposons d'abord la terre sphérique, soit a son rayon, λ la latitude du parallèle moyen que nous voulons représenter en véritable grandeur, $r = a \cos \lambda$ le rayon de ce parallèle, T la différence des longitudes des méridiens extrêmes de la carte, S l'angle au sommet du secteur développé.

L'arc mm' est égal au développement de l'arc rT du parallèle moyen; donc, dans la figure 1,

$$\frac{180}{\pi a \cos \lambda} = \frac{\mathrm{T}}{\operatorname{arc} mm'},$$

Or comme les lignes SM sont égales dans les deux figures, le rayon SM du parallèle moyen est égal à

$$SM = a \operatorname{cotang} \lambda\,;$$

la figure 2 donnera donc

$$\frac{180}{\pi a \operatorname{cotang} \lambda} = \frac{S}{\operatorname{arc} mm'}\,;$$

égalant les deux valeurs de arc mm' sur le cône et sur la projection, on arrive à

$$S = T \sin \lambda.$$

Ainsi l'on tracera un angle mSm' d'autant de degrés que le veut cette expression pour représenter l'angle total du développement; on prendra $SM = a$ cotang λ pour rayon du parallèle moyen de la projection, puis on portera de M vers a' et b' les longueurs développées en ligne droite du méridien MP, c'est-à-dire des arcs de 1°, 5°, 10°, etc., entre les limites des latitudes extrêmes. Si la carte doit comprendre d degrés en latitude, ab sera égal à $\frac{\pi a d}{180°}$, et chacune des longueurs Ma', Mb' à $\frac{\pi a d}{90°}$; puis on décrira du centre S des arcs qui figureront les parallèles de la carte. Les méridiens seront des droites partant du sommet S et passant par des points également distants pris sur mm'. En appelant θ l'angle de deux méridiens de la carte correspondant à l'angle t compté sur la sphère, on aura évidemment

$$\frac{\theta}{t} = \frac{S}{T} = \sin \lambda.$$

A la latitude l le rayon du parallèle sera égal à $a\,[\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)]$ et l'arc correspondant à la longitude t, à

$$at \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)].$$

L'erreur commise sur chaque degré de parallèle pourra donc s'exprimer par

$$a \sin \lambda [\operatorname{cotang} \lambda - (l - \lambda)] - a \cos \lambda\,,$$

ou par

$$a(l - \lambda) \sin \lambda$$

Lorsque le centre commun S tombe en dehors des limites de la feuille, on construit les parallèles par points en les rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires, le méridien moyen et la tangente au parallèle moyen.

En appelant ρ le rayon de chaque parallèle, on pourra écrire

$$\rho = a \operatorname{cotang} \lambda - a(l - \lambda)$$
$$x = \rho \sin \theta = \rho \sin(t \sin \lambda)$$
$$y = a \operatorname{cotang} \lambda - \rho \cos(t \sin \lambda).$$

Quand on aura calculé ainsi les coordonnées d'autant de points que l'on voudra d'un même parallèle et celles du parallèle moyen pour lequel il suffira de faire dans les formules précédentes $l = \lambda$, on tracera les méridiens en joignant par des droites les points de même longitude; les autres parallèles s'obtiendront en portant sur ces méridiens, au-dessus et au-dessous du parallèle moyen, les longueurs des arcs de latitude.

Il est facile, dans la projection conique, de tenir compte de la forme sphéroïdale de la terre. Le rayon du parallèle moyen développé doit d'abord être modifié par la substitution de la grande normale au rayon de la terre, de sorte qu'en appelant a le rayon de l'équateur terrestre, le rayon de la projection du parallèle moyen dont λ est la latitude, sera

$$\frac{a \operatorname{cotang} \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir ensuite les rayons des autres parallèles, on portera sur le méridien les longueurs des degrés de latitude telles qu'elles ont été calculées dans la table en prenant $\frac{1}{299,15}$ pour valeur de l'aplatissement.

L'angle θ de deux méridiens dont les longitudes diffèrent de t, sera exprimé par

$$\theta = \frac{t \sin \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les coordonnées se calculent comme dans l'hypothèse de la terre sphérique.

Les avantages de la projection conique sont de rendre les erreurs inhérentes à tout canevas, indépendantes de la longitude, de permettre de comparer entre eux les éléments situés sous la même latitude, et de conserver les angles des méridiens et des parallèles; les principaux défauts sont de ne conserver ni les angles ni les surfaces et de ne donner les distances avec exactitude que dans le sens

des méridiens, les parallèles situés tant au-dessus qu'au-dessous du parallèle moyen excèdent ceux qui leur correspondent sur le globe, de sorte que cette projection est tout à fait impropre à représenter des pays étendus en latitude.

3. On attribue l'invention de la projection conique à *Claude Ptolémée* d'Alexandrie (150 ans après J.-C.), qui dans le XXIVe chapitre du premier livre de sa *Géographie*, donne deux méthodes pour représenter le monde connu de son temps; dans la première le célèbre géographe, après avoir montré la possibilité de voir les méridiens projetés en ligne droite, remarque que, comme il est impossible de conserver sur la carte le rapport exact des degrés de tous les parallèles, il suffit de conserver ce rapport pour le parallèle extrême nord passant par *Thulée*, et, pour l'équateur, de développer le parallèle de *Rhodes* (sur lequel avaient été faites le plus de recherches relatives aux degrés des parallèles) de façon que ses degrés conservent leur rapport véritable avec les degrés de méridien. Assignant 63° à la latitude de Thulée, et 36° à celle de Rhodes, Ptolémée prend pour rayon de ce dernier parallèle (fig. 46) $GK = 79\ m$ (m désignant la longueur d'un degré de méridien), nombre qui diffère très-peu de la cotangente du parallèle de 36° dont la valeur est $78{,}87\ m$; remarquons toutefois que rien, dans l'ouvrage de Ptolémée, ne semble indiquer que l'auteur ait eu en vue le développement d'un cône tangent à la terre; c'est plutôt par tâtonnements que par un calcul rigoureux qu'il a dû arriver à ce résultat. Quoi qu'il en soit, le rayon GS de l'équateur est pris égal à $79\ m + 36\ m$ ou $115\ m$ et le rayon GP du parallèle de Thulée à $115\ m - 63\ m$ ou $52\ m$; remarquant ensuite que les degrés du parallèle de Rhodes sont à ceux de l'équateur dans le rapport $\frac{\cos 36°}{1}$ ou environ $\frac{4}{5}$, Ptolémée porte sur ce parallèle à droite et à gauche du méridien du milieu 18 arcs de grand cercle de 4° (soit $4\ m$) représentant chacun 5° de ce parallèle, et trace les méridiens en joignant ces points au centre commun G. Les arcs QPO, TSR sont ainsi dans le rapport de PG à SG, soit $\frac{52}{115}$, rapport qui diffère très-peu du véritable $\frac{\cos 63}{1} = \frac{52{,}21}{115}$ qui existe entre les degrés du parallèle de Thulée et ceux de l'équateur, mais ils sont trop grands comparés à HKL. Comme Ptolémée étendait le monde connu à 16° 1/2 au sud de l'équateur, il trace à cette latitude l'*antiparallèle* de Méroë, lieu situé à 16° 1/2 au nord de l'équateur; il divise

cet arc comme celui qui passe par Méroë et trace les méridiens en lignes droites joignant ces points à ceux de l'équateur. Cette projection n'est, comme on le voit, qu'une altération grossière de la projection conique ; aussi Ptolémée lui préfère une autre méthode dont nous parlerons plus loin.

4. Nous avons dit que la projection conique ne pouvait convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude. En supposant que l'arc AB de latitude (fig. 47) soit très-petit, il n'y aurait pas d'inconvénient à prendre sa corde pour le côté du cône tronqué à développer. Dans ce cas les rayons des parallèles extrêmes seraient respectivement AO et BO, et la carte aurait une exactitude rigoureuse sur ces parallèles, mais ceux qui seraient intermédiaires pécheraient par défaut.

L'angle O ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ arc supplément de AB — $\frac{1}{2}$ arc BP ou $\frac{l_a + l_b}{2}$ (en appelant l_a et l_b les latitudes extrêmes), le triangle rectangle AOa donne

$$AO = \rho_a = a \frac{\cos l_a}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

De même

$$BO = \rho_b = a \frac{\cos l_b}{\sin \frac{1}{2}(l_a + l_b)}.$$

Mentionnons ici la mappemonde de Jean *Ruysch* publiée à Rome en 1508, et projetée en développement du cône ayant son sommet au pôle arctique, coupant la sphère à l'équateur et se terminant sur le plan prolongé du parallèle de 38° de latitude australe (1).

Gérard *Mercator*, le célèbre inventeur des cartes réduites, proposa le premier de remplacer, pour les cartes particulières, le cône tangent à la sphère par un cône sécant, traversant le globe sur deux parallèles symétriquement choisis de manière à balancer dans de justes proportions le rétrécissement et la dilatation des surfaces représentées dans le milieu et sur les bords de la carte. C'est sur ce principe que fut dressée la projection de la grande carte d'Europe tracée par Mercator en 1554 ; la convergence des méridiens y est déterminée par le rapport mutuel des parallèles de 40° et de 60° de latitude dont les degrés conservent leur véritable rapport avec les

(1) Elle est reproduite tout entière à l'échelle de 2/5 dans l'*Atlas du moyen âge* de Lelewel, Bruxelles, 1857, in-8, planche XLIV.

degrés de méridiens tous égaux entre eux. Il y a alors contraction dans la zone intermédiaire et expansion dans les deux zones extrêmes.

5. Le procédé de Mercator fut adopté deux siècles après par l'astronome français Joseph-Nicolas *de l'Isle* pour la construction de la grande carte de la Russie publiée en 1745. Cette carte comprenant depuis le 40° degré de latitude nord jusqu'au 70°, le parallèle moyen répondait à 55° et les parallèles communs au cône et à la sphère étaient ceux de 47° 30′ et de 62° 30′; les méridiens étaient divisés en degrés égaux.

Le célèbre mathématicien *Euler* a étudié cette projection (1), et, après en avoir exposé les principes, a déterminé le cône qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° que les erreurs soient égales aux extrémités méridionale et septentrionale de la carte;

2° qu'elles soient aussi égales à la plus grande de celles qui ont lieu vers le parallèle moyen.

Nous reproduisons ici ce travail qui, quoique appliqué à la carte de Russie, pourra servir de type pour les cartes des pays très-étendus en latitude.

Soit (fig. 48) l_a la moindre latitude du pays à représenter, l_b la plus grande; AB la portion du méridien du milieu comprise entre ces deux latitudes extrêmes. Désignons par δ la grandeur de 1° de méridien; soient P et Q les intersections du méridien central avec les parallèles dont les degrés doivent conserver sur la carte leur véritable rapport avec ceux de latitude, l_p et l_q les latitudes de ces deux parallèles, sur chacun d'eux un degré de longitude a respectivement pour valeur

$$\delta \cos l_p, \quad \text{et} \quad \delta \cos l_q.$$

Portons ces valeurs de 1°, Pp et Qq sur deux droites perpendiculaires à AB et que nous considérerons comme des arcs élémentaires de parallèles, et joignons pq; cette droite représentera le méridien éloigné de 1° en longitude du méridien central AB, et le point d'intersection O sera le point de concours de tous les méridiens et le centre de tous les parallèles.

(1) *De projectione geographica de l'Isliana in mappa generali Imperii Russici usitata*, dans les *Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ pro anno MDCCLXXVII*, Saint-Pétersbourg, 1778, in-4, p. 143 à 153.

Cherchons d'abord la distance de ce centre O à l'équateur. Nous aurons de suite

$$\frac{Pp - Qp}{PQ} = \frac{Pp}{PO}, \quad \text{ou} \quad \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q} = \frac{\delta \cos l_p}{PO},$$

d'où

$$PO = \frac{\cos l_p (l_q - l_p)}{\cos l_p - \cos l_q}.$$

Ce centre une fois déterminé, on décrira avec OP une circonférence sur laquelle on portera des longueurs égales $\delta \cos l_p$; les droites qui joindront les points de division au centre O seront les méridiens distants de 1° de longitude ; en portant ensuite sur le méridien du milieu les degrés égaux de latitude, et, faisant passer des circonférences concentriques par chacun des points de division, on aura les parallèles.

Cherchons les erreurs qui résultent de cette construction sur les parallèles extrêmes de A et de B. D'abord l'angle $\omega = POp$ qui représente *un* degré de la sphère s'obtiendra par l'égalité

$$\omega = \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta(\cos l_p - \cos l_q)}{l_p - l_q}$$

qui devient

$$\omega = \frac{\cos l_p - \cos l_q}{(l_q - l_p)\alpha},$$

en supposant $\delta = 1°$, et convenant d'exprimer le dénominateur $l_p - l_q$, non en degrés, mais en parties du rayon, ce qui revient à prendre $\alpha = 0{,}01745329$ pour valeur de 1° sur une circonférence de rayon égal à l'unité.

Appelons encore z la distance en degrés du centre O au pôle. La distance du point P au pôle étant exprimée par $90° - l_p$, celle de ce même point au point O le sera par $90° - l_p + z$ dont la valeur en parties du rayon sera

$$\alpha(90° - l_p + z).$$

On pourra donc écrire

$$PO = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\cos l_p - \cos l_q} = \alpha(90° - l_p + z),$$

d'où

$$z = \frac{(l_q - l_p)\cos l_p}{\alpha(\cos l_p - \cos l_q)} - 90° + l_p.$$

La distance du parallèle extrême de A au point O sera

$$AO = 90^\circ - l_a + z,$$

et, en parties du rayon

$$AO = \alpha(90^\circ - l_a + z);$$

en multipliant AO par ω on aura la valeur du degré sur ce parallèle

$$Aa = \frac{\delta(90^\circ - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p},$$

au lieu de $\delta \cos l_a$; la différence de ces deux valeurs donne donc l'erreur sur le parallèle de A. En B cette erreur est la différence entre

$$\frac{\delta(90^\circ - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} \quad \text{et} \quad \delta \cos l_b.$$

Si nous cherchons, comme l'a fait Euler, à déterminer les parallèles de P et Q de manière à rendre les erreurs en A et B égales entre elles, il faut poser

$$\frac{(90^\circ - l_a + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_a = \frac{(90^\circ - l_b + z)(\cos l_p - \cos l_q)}{l_q - l_p} - \cos l_b$$

ou

$$(l_a - l_b)(\cos l_p - \cos l_q) + (l_q - l_p)(\cos l_a - \cos l_b) = 0.$$

Nous pouvons représenter 1° sur les parallèles de A et de B respectivement par

$$\alpha(90^\circ - l_a + z)\omega \quad \text{et} \quad \alpha(90^\circ - l_b + z)\omega;$$

on obtiendra alors

$$\alpha(90^\circ - l_a + z)\omega - \cos l_a = \alpha(90^\circ - l_b + z)\omega - \cos l_b,$$

ou

$$\alpha(l_a - l_b)\omega = \cos l_a - \cos l_b,$$

d'où enfin

$$\omega = \frac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha(l_b - l_a)},$$

valeur qui devra s'exprimer en minutes et secondes.

Égalons de plus ces deux erreurs à la plus grande de celles qui peuvent avoir lieu entre A et B, en supposant d'abord que cette erreur maximum ait lieu sur le milieu X de AB ; la latitude de X étant $\frac{l_a + l_b}{2}$, l'erreur y sera égale à

$$-\left[\alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega - \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right],$$

car elle est évidemment de signe contraire aux erreurs de A et B. Nous aurons, en exprimant la condition énoncée,

$$\alpha(90^\circ - l_a + z)\omega - \cos l_a = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega,$$

$$\alpha(90^\circ - l_b + z)\omega - \cos l_b = \cos\frac{l_a + l_b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{l_a + l_b}{2} - z\right)\omega.$$

Remplaçons ω par sa valeur $\dfrac{\cos l_a - \cos l_b}{\alpha\,(l_b - l_a)}$; il vient

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}l_a - \frac{1}{2}l_b + 2z)(\cos l_a - \cos l_b)}{l_b - l_a} = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2},$$

égalité qui se réduit à

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z) = \frac{l_b - l_a}{\cos l_a - \cos l_b}\left(\cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}\right),$$

d'où l'on tire enfin z.

Appliquons ces calculs au cas de la carte de Russie

$$l_a = 40^\circ; \quad l_b = 70^\circ; \quad \frac{l_a + l_b}{2} = 55^\circ.$$

On calcule d'abord ω

$$\omega = \frac{\cos 40^\circ - \cos 70^\circ}{30\alpha} = \frac{0,4240243}{0,5235987} = 48'\,44''.$$

L'équation

$$(180^\circ - \tfrac{3}{2}l_a - \tfrac{1}{2}l_b + 2z)\alpha\omega = \cos l_a + \cos\frac{l_a + l_b}{2}$$

donne

$$(85^\circ + 2z)\alpha\omega = \cos 40^\circ + \cos 55^\circ = 1,33962,$$

or $\alpha\omega = 0,0141$; donc

$$2z = \frac{1,33961}{0,01410} - 85^\circ = 10^\circ, \quad \text{d'où} \quad z = 5^\circ.$$

Nous avons supposé que la plus grande erreur était au milieu de AB; cherchons quel est en réalité le point où l'erreur est maximum; soit x sa latitude; l'erreur y sera

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

en égalant sa différentielle à zéro, nous obtenons

$$-\alpha\omega dx + \alpha dx \sin x = 0,$$

d'où

$$\sin x = \omega = 0{,}8098270,$$

et enfin

$$x = 54^\circ 4',$$

latitude qui définit un lieu peu éloigné du milieu de AB, dont la latitude est 55°.

En égalent l'erreur en x à l'erreur en A et B, on obtient

$$\alpha(180^\circ - l_\circ - x + 2z)\omega = \cos l_\circ + \cos x,$$

$$85^\circ 55' + 2z = \frac{\cos l_\circ + \cos x}{\alpha\omega} = 95^\circ 56'.$$

Donc

$$z = 5^\circ 0' 30''.$$

On peut donc prendre sans erreur appréciable $z = 5^\circ$.

L'erreur en A et en B est alors exprimée par

$$\alpha\omega(90^\circ - l_\circ + z) - \cos l_\circ = 55\alpha\omega - 0{,}7660444 = 0{,}00946.$$

Ainsi le degré du parallèle de A (40° de latitude) sera exprimé par 0,77550 au lieu de 0,76604, valeur du degré correspondant sur la sphère; ce degré est donc trop grand de $\frac{1}{105}$ environ du degré du méridien ou de $\frac{1}{81}$ du degré réel du parallèle de 40°. On trouve de même que le degré du parallèle de 70°, en B, est trop grand de $\frac{1}{36}$ de sa valeur réelle qui est 0,34202.

Cette erreur, dit Euler, est parfaitement acceptable à cette latitude de 70°, et ainsi la position du centre des parallèles à 5° du pôle convient très-bien pour la carte de la Russie. Il ne faut pas oublier que les méridiens distants sur la sphère de 1° sont représentés par des droites faisant entre elles des angles de 48′ 44″.

Euler remarque encore que le grand cercle de la sphère le plus altéré dans cette projection est l'équateur dont chaque degré est égal à 1,33950, en prenant le degré de latitude pour unité; mais comme il ne figure pas dans la carte, cette erreur nuit peu à la projection.

Si du point F (fig. 49) représentant le méridien central, et situé par conséquent sur l'équateur à une distance FE du point E représentant 90° de la sphère, on abaisse FG perpendiculaire sur OE, cette droite représentera l'un des grands cercles perpendiculaires au

méridien OE ; sa longueur différera peu de sa longueur réelle 90°, car l'angle EOF étant égal à 72° 53′ et OF = OE à 95°, on a

$$FG = 95 \sin 72° 53' - 90°,79221.$$

Il en résulte que, dans cette projection, on peut obtenir les distances entre deux points sans commettre une grande erreur en mesurant à l'échelle des latitudes la droite qui les unit.

La projection n° XXXI a été dressée dans ce système.

6. Le savant anglais Patrice *Murdoch* a posé, en 1758, les principes d'une projection conique égale, *dans son ensemble seulement*, à la zone sphérique correspondante et ayant avec elle deux parallèles communs (1).

Soient (fig. 50) l_a, l_b les latitudes des parallèles extrêmes Aa, Bb qui limitent la zone à représenter ; M le milieu de AB, sa latitude sera $\frac{l_a + l_b}{2}$; a le rayon de la sphère exprimé en degrés, le degré étant pris pour unité.

Pour satisfaire aux conditions du problème, il faut, en supposant que PN et PO soient les rayons des parallèles extrêmes de la carte, que la droite ON soit égale à l'arc AB, et que la surface engendrée par la révolution de ON autour de l'axe pC soit égale à $2\pi a\,(ba)$.

Cette droite ON doit évidemment couper le quadrant PME en deux points η et ζ également distants du point M.

Appelons δ les angles égaux ηCM, ζCM ; on devra avoir

$$2\pi Kk \text{ arc AB} = 2\pi a\,(ab).$$

Or les triangles semblables Kck, MFC donnent

$$\frac{Kk}{FC} = \frac{KC}{MC}; \quad \text{donc} \quad Kk = a \cos\frac{l_a + l_b}{2}\cos\delta,$$

et, en substituant,

$$\frac{l_b - l_a}{2}\cos\frac{l_a + l_b}{2}\cos\delta = \sin l_b - \sin l_a = 2\sin\frac{l_b - l_a}{2}\cos\frac{l_a + l_b}{2};$$

(1) *Philosophical Transactions ; vol. L, part. II, for the year* 1758, Londres, 1759, in-4, p. 553, à 562 : *of the best form of geographical Maps, by the Rev.* Patrick MURDOCH, M. A. F. R. S ; read feb. 9. 1758.

d'où

$$\cos\delta = \frac{2}{\frac{l_b - l_a}{2}} \sin\frac{l_b - l_a}{2} = \frac{\sin\frac{l_b - l_a}{2}}{l_b - l_a}.$$

On calculera facilement δ et par suite la distance du milieu K du méridien de la carte aux deux parallèles communs à la sphère et au cône.

Cherchons maintenant le rayon $Kp = R$ du parallèle du milieu :

$$\frac{Kp}{CF} = \frac{KC}{MF}, \quad \text{ou} \quad Kp = a\cos\frac{l_a + l_b}{2} \frac{\cos\delta}{\sin\frac{l_a + l_b}{2}},$$

donc

$$R = a \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2} \cos\delta.$$

Il ne reste plus qu'à tracer les méridiens par le simple développement du cône. Si nous appelons T la différence des longitudes des méridiens extrêmes du pays à représenter, S l'angle correspondant du développement, on devra avoir

$$TKk = S \cdot Kp;$$

en remplaçant Kk par $a\cos\frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$ et Kp par $a \operatorname{cotang} \frac{l_a+l_b}{2}\cos\delta$, il vient

$$S = T\sin\frac{l_a + l_b}{2}.$$

Murdoch, pour tracer les parallèles intermédiaires, divisait la droite ON en parties égales, de sorte que le rayon d'un parallèle quelconque était égal à

$$R + \frac{l_a + l_b}{2} - l.$$

Cette méthode, contraire aux conditions du problème posé par Murdoch, était tout arbitraire, mais avait l'avantage de diminuer un peu les défauts de la carte : c'est *Tobias Mayer* (1) qui, en repre-

(1) J. T. Mayer, *Anweisung zur Werzeichnung der Charten, cap III*, 1794 *Erlangen*, réédité en 1804, 1815, 1827.

nant le problème de Murdoch, a rempli la condition de conserver les deux parallèles η et ζ en leur donnant pour rayons

$$p\eta = p\mathrm{K} - \mathrm{K}\eta \quad \text{et} \quad p\zeta = p\mathrm{K} + \mathrm{K}\zeta,$$

et comme $\mathrm{K}\eta = \mathrm{K}\zeta = a \sin\delta$, on aura

$$p\eta = \mathrm{R} - a\sin\delta = a\frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} + \delta\right)}{\sin\frac{l_a + l_b}{2}},$$

$$p\zeta = \mathrm{R} + a\sin\delta = a\frac{\cos\left(\frac{l_a + l_b}{2} - \delta\right)}{\sin\frac{l_a + l_b}{2}}.$$

Quelle que soit la méthode adoptée, cette projection ne peut convenir pour une bande de plus de 8 ou 10 degrés de latitude, et dans des limites aussi rapprochées presque toutes les projections coniques ont à peu près les mêmes avantages; quant à la question de conserver la superficie totale de la carte, elle n'est que secondaire et oblige au contraire à comprimer les superficies et les distances dans la zone moyenne, tant en longueur qu'en largeur, et à les étendre dans les deux zones extrêmes dans toutes les directions.

7. Murdoch a indiqué une seconde projection conique qui a pour but d'obtenir l'exactitude de la perspective en plaçant l'œil au centre du globe comme dans la projection centrale et en s'assujettissant encore à la condition de conserver la surface totale de la zone à représenter (1).

Il suffit pour cela (fig. 51) d'imaginer des rayons visuels menés du centre C de la terre aux différents points de la surface; leurs intersections avec la surface du cône sécant ayant pour axe la ligne des pôles donneront les points correspondants de la carte. Ainsi les points extrêmes O et N s'obtiendront en joignant le centre C aux points extrêmes A et B de la zone sphérique considérée. La distance CK qui détermine la position du cône s'obtiendra par la condition de conservation de la surface totale. Substituons à la détermination de CK celle de KO qui est la demi-longueur N. et S. de la carte; nous aurons

(1) *Addenda to Mr. Murdoch's paper. Philosophical Transactions* (*ubi supra*, p. 568).

$$2\pi Kk \,.\, 2 \,.\, OK = 2\pi a(ab).$$

$$Kk = KC \cos \frac{l_a + l_b}{2} = OK \cos \frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang} \frac{l_b - l_a}{2}.$$

Donc

$$OK^2 \cos \frac{l_a + l_b}{2} \operatorname{cotang} \frac{l_b - l_a}{2} = a^2 \sin \frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_a + l_b}{2},$$

$$OK^2 = \frac{a^2 \sin^2 \frac{l_b - l_a}{2}}{\cos \frac{l_b - l_a}{2}} = a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{l_b - l_a}{2} \cos \frac{l_b - l_a}{2},$$

et enfin

$$OK = a \operatorname{tang} \frac{l_b - l_a}{2} \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Si nous appelons δ la différence des latitudes $l - \frac{l_a + l_b}{2}$ entre un parallèle quelconque et le parallèle moyen passant par K, la distance correspondante d sur la carte sera égale à

$$d = KC \operatorname{tang} \delta = a \operatorname{tang} \delta \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Pour les parallèles communs à la sphère et au cône l'angle δ' sera défini par la relation

$$\cos \delta' = \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}},$$

donc

$$K\eta = K\zeta = a \sqrt{1 - \cos \frac{l_b - l_a}{2}}\, a \sqrt{2} \sin \frac{l_b - l_a}{4}.$$

Les rayons des parallèles s'obtiennent très-facilement. D'abord

$$pK = R = CK \operatorname{tang} KCp = a \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2} \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle supérieur, dont la latitude est l_b, sera

$$\rho_b = pO = Kp - KO = \frac{a \cos l_b \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Le rayon du parallèle inférieur, dont la latitude est l_a, sera

$$\rho_a = pN = Kp + KO = \frac{a \cos l_a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}}}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Enfin le rayon d'un parallèle de latitude l sera

$$\rho_l = pK - d = \frac{a \sqrt{\cos \frac{l_b - l_a}{2}} \cos l}{\sin \frac{l_a + l_b}{2} \cos \left(l - \frac{l_a + l_b}{2}\right)}.$$

On pourra aussi, dans cette projection comme dans la précédente, tracer les parallèles par points à l'aide de leurs coordonnées rectangulaires x et y.

Les méridiens s'obtiendront encore par le simple développement du cône. L'angle du secteur développé sera donné par la formule

$$S = T \sin \frac{l_a + l_b}{2},$$

en appelant T la différence des longitudes des méridiens extrêmes.

C'est à tort que quelques auteurs ont pensé que cette projection, connue sous le nom de *seconde projection de Murdoch*, jouissait de la propriété de conserver les angles et par suite le rapport entre les arcs élémentaires de méridiens et de parallèles; elle convient un peu mieux que la première pour les *coniglobes* parce qu'elle donne l'aspect que l'on aurait en se plaçant au centre du globe, chaque point restant sur son rayon visuel. Mais elle ne doit pas être confondue avec la projection conique orthomorphe de Lambert, dont nous allons parler.

8. Signalons auparavant une troisième projection indiquée en quelques mots par Murdoch, dans laquelle la position du cône est donnée par la relation

$$\frac{CK}{CM} = \frac{\text{arc}\, MA}{\text{tang}\, MA},$$

d'où l'on déduit

$$CK = \frac{a \frac{\pi}{180} \frac{l_b - l_a}{2}}{\text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}} = \frac{a . \frac{l_b - l_a}{2}}{57{,}2957\ldots \text{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}.$$

La condition de conservation de la surface totale donne les autres éléments.

La rayon moyen

$$pK = R = CK \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2} = \frac{a \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{cotang} \frac{l_a + l_b}{2}}{57,2957\ldots \operatorname{tang} \frac{l_b + l_a}{2}}.$$

Les distances égales

$$KO = KN = \frac{a\, 57,2957\ldots \sin \frac{l_b - l_a}{2} \operatorname{tang} \frac{l_b - l_a}{2}}{\frac{l_b - l_a}{2}}.$$

Les autres parallèles s'obtiennent en partageant les méridiens en parties égales.

Ce troisième système étant, sous tous les rapports, inférieur aux deux premiers, nous ne nous y arrêterons pas.

9. Lambert (1) est le premier qui ait indiqué un développement conique jouissant de la propriété de conserver les angles, excepté au sommet où les 360° ayant sur la sphère le pôle pour centre, sont évidemment représentés par un angle variable suivant les conditions du problème. Nous avons exposé avec détail aux §§ 4 et 8 du chapitre des projections sans déformation, la méthode employée par ce savant géomètre, ainsi que les résultats auxquels il est parvenu ; nous avons dit aussi que l'illustre Gauss, cinquante ans après Lambert, a obtenu les mêmes résultats comme application de sa formule générale des projections conservant la similitude des représentations.

En appelant ρ le rayon d'un parallèle quelconque, z sa colatitude $90° - l$, nous avons établi la formule

$$\rho = K\left(\operatorname{tang} \frac{z}{2}\right)^{\lambda},$$

dans laquelle λ indique le rapport entre l'angle de deux méridiens quelconques de la projection et l'angle correspondant sur la sphère, et K une longueur constante que nous avons prise égale à $\frac{1}{2}\pi a$.

Cherchons l'angle au sommet $2x$ du cône sécant à la sphère dont le développement doit donner le canevas de la carte. L'angle au cen-

(1) *Entwerfung der Charten*, sect. IV, p. 135.

tre du secteur développé étant égal à $\lambda.\ 360°$, l'égalité de deux arcs correspondants quelconques du cône et de ce secteur donnera

$$2\pi\rho \sin\alpha = \frac{2\pi}{360}\,\rho\lambda\,.\,360,$$

d'où

$$\sin\alpha = \lambda.$$

Le rapport d'agrandissement des arcs élémentaires est exprimé par

$$m = \frac{\lambda K \left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin z},$$

et celui des surfaces élémentaires est le carré de m.

Nous avons vu comment on peut, dans la projection conique orthomorphe de Lambert, tenir compte de l'aplatissement de la terre.

Pour les cartes particulières la valeur de λ se détermine le plus souvent par la connaissance des colatitudes z_0 et z_1 des parallèles dont les degrés doivent conserver leur véritable rapport avec ceux de latitude et qui sont, par conséquent, communs à la sphère et au cône,

$$\lambda = \frac{\log\sin z_1 - \log\sin z_0}{\log\operatorname{tang}\frac{z_1}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}.$$

Sir *John Herschel* (1), en traitant un cas particulier du problème de Gauss, a donné trois applications de la même formule pour les cas de $\lambda = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; la première représente la surface totale du globe dans un secteur circulaire de 240°, la seconde dans un demi-cercle et la troisième dans un secteur de 120°.

10. Le docteur H. C. *Albers* de Lünebourg, après avoir étudié les trois projections de Murdoch (2) et en avoir montré les défauts, détermina une projection conique possédant la propriété de conserver les surfaces élémentaires aussi bien que la surface totale. Nous en avons déjà parlé (3) en traitant des projections équivalentes. Rappelons en quelques mots le principe de sa construction.

---

(1) *Voir* chap. II, § 11, note 3.

(2) *Ueber Murdoch's drey Kegelprojectionen von H. C.* Albers, inséré dans la *Monatliche Correspondenz* de Zach, février 1805, p. 97 à 114, et mars, p. 240 à 250.

(3) *Voir* chap. III, § 16.

Soient l_1 et l_2 les latitudes de deux parallèles qui doivent être communs au cône et à la sphère.

On calculera d'abord l'expression

$$K = \frac{1}{\sin\frac{l_1+l_2}{2}\cos\frac{l_2-l_1}{2}},$$

puis les rayons des deux parallèles l_1 et l_2 par les formules

$$\rho_1 = a\mathrm{K}\cos l_1;\quad \rho_2 = a\mathrm{K}\cos l_2.$$

Le rayon d'un parallèle quelconque de latitude l aura pour expression

$$\rho = \sqrt{2a\mathrm{K}(\sin l_1 - l) + \rho_1^2}.$$

Les méridiens s'obtiennent à la manière ordinaire par le simple développement du cône; les angles de ces méridiens entre eux sont réduits dans le rapport de 1 à K.

11. Lambert a indiqué aussi (1) toute une famille de projections coniques jouissant de la propriété de conserver les surfaces ; c'est ce que nous avons appelé les *projections isosphériques sténotères de Lambert.* Leur formule générale est

$$\rho = 2\sqrt{m}\,a\sin\frac{z}{2},$$

dans laquelle z désigne la colatitude de chaque parallèle, ρ le rayon de sa projection et m un coefficient constant tel que les angles des méridiens de la carte sont dans le rapport de 1 à m avec ceux de la sphère. Il en résulte que, si l'on appelle 2α l'angle au sommet du cône supposé tangent à la sphère, on doit avoir

$$\frac{1}{m} = \sin\alpha.$$

Ces projections sont remarquables par la facilité avec laquelle on construit graphiquement la valeur de chaque rayon ρ, le facteur $2a\sin\frac{z}{2}$ représentant la corde de l'arc de méridien qui joint, sur la sphère, le pôle au parallèle de colatitude z. La valeur de m se déter-

(1) *Voir* chap. III, §§ 13 et 16.

mine par la connaissance de la colatitude z_0 du parallèle dont les degrés devront sur la carte conserver leur rapport exact avec ceux de latitude, car on doit avoir

$$m = \frac{1}{\cos^2 \frac{z_0}{2}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet que nous avons déjà traité.

PROJECTIONS CONIQUES MODIFIÉES.

12. Dans les projections coniques que nous venons d'examiner, les méridiens sont tous des génératrices du cône déterminées par les plans méridiens prolongés et les parallèles des cercles concentriques dont l'écartement dépend des propriétés secondaires que l'on peut donner à la projection. Leur principal avantage consiste dans la simplicité de leur construction qui n'exige que l'emploi de la règle et du compas, et dans leur propriété de conserver l'angle des méridiens et des parallèles; mais leurs défauts les plus importants sont d'altérer beaucoup les distances prises dans le sens des parallèles et de changer le signe des erreurs de chaque côté des deux parallèles communs à la sphère et au cône. On doit donc reconnaître avec *Malte-Brun* que « quelque ingénieuses que soient les modifications par lesquelles « on a essayé de perfectionner la projection conique, elles aboutis- « sent toutes à faire perdre à cette projection sa simplicité et sa faci- « lité primitive sans obtenir complétement les autres avantages que « l'on voudrait lui donner (1). » Les géographes ont donc cherché, pour leurs cartes spéciales, des projections plus commodes et qui ne se rapportent que très-indirectement au développement d'une figure régulière quelconque.

13. La première de ces modifications a été imaginée par *Ptolémée* (150 ans environ ap. J.-C.), qui en expose les principes dans le chap. 24 de sa Géographie (1er livre), après avoir indiqué la projection conique dont nous avons déjà parlé au § 3.

Pour représenter le monde connu de son temps, Ptolémée remarque d'abord que le parallèle de Syène, dont la latitude est 23° 50′ N, occupe à peu près le milieu de l'espace à construire limité par le parallèle de

(1) *Précis de la géographie universelle*, par MALTE-BRUN, Paris 1810, t. II, p. 114.

Thulé (63° N.) et par l'*antiparallèle* de Meroë, (16° 3′ S.) Il suppose alors l'œil du spectateur dans le prolongement du rayon qui passe par le parallèle de Syène : « l'équateur et les parallèles, inclinés de 23° 50′ « sur ce rayon, deviennent les bases circulaires d'autant de cônes « obliques ayant tous l'œil pour sommet, et paraissent comme des « arcs de cercle parallèles ayant leur partie convexe tournée vers le « sud, tandis que les méridiens situés des deux côtés du méridien « moyen sont vus comme des arcs dont la concavité est tournée « vers le méridien moyen et qui deviennent de plus en plus con- « caves à mesure qu'ils s'en éloignent. » Mais au lieu de développer ces principes conformément à la perspective, Ptolémée détermine les lignes de sa projection d'après des proportions arbitraires, combinées de manière à conserver autant que possible la configuration des pays.

Après avoir choisi (fig. 52) une longueur arbitraire égale à l'unité pour représenter le degré de grand cercle de la sphère, il décrit une circonférence d'un rayon égal à 90 degrés, de manière que le diamètre vertical représente le développement du demi-méridien central, et porte EZ = (23° 50′); Z est ainsi au point de l'équateur dont le centre sera à l'intersection du diamètre vertical et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde BZ. Il est facile de calculer la distance HZ, rayon cherché de l'équateur,

$$ZH = \frac{ZB}{2} \cdot \frac{1}{\sin EBZ}, \quad \text{et} \quad \text{tang}\, EBZ = \frac{EZ}{BE} = \frac{23° 50'}{90°} = \text{tang}\, 14° 49' 56'',3,$$

d'où

$$ZH = \frac{90°}{2 \cos(14°, 49', 56'', 3)} \frac{1}{\sin(14°, 40', 56'', 3)} = \frac{90}{\sin(29°, 39', 52'', 6)} = (181° \; 50' \; 81).$$

Ptolémé, par les régles de l'ancienne trigonométrie, trouve ZH = 181° 50′ et prend cette valeur pour rayon de l'équateur. Pour espacer également les autres parallèles il prend pour rayon de ces divers cercles 181° 50′ augmentés de la latitude australe ou diminués de la latitude boréale.

Ptolémée trace alors (fig. 53) le rectangle ABCD dont la longueur 180° égale le double de la hauteur 90°, et le divise en deux parties égales par la perpendiculaire EK. Il porte d'abord 16° 3′ de K en Z, puis 181° 50′ de Z en H pour déterminer le centre commun H. Si l'on prend ensuite ZF = 23° 50′ et ZM = 63°, les cercles passant par H, Z, F, M seront l'antiparallèle de Meroë, l'équateur, le parallèle de

Syène et celui de Thulé. On porte ensuite sur ces quatre arcs de cercle les longueurs de leurs degrés qui sont cos (16° 3′), 1, cos(23° 50′) et cos 63°; on obtient les méridiens en faisant passer des *courbes mécaniques* par les quatre points correspondants de ces arcs de cercle.

Ptolémée recommande cette construction comme plus exacte que la première qu'il donne dans le même chapitre et que nous avons exposée au paragraphe 3, parce que l'équateur et trois parallèles conservent leurs véritables degrés de longitude tandis que les autres sont très-peu altérés; ainsi sur le parallèle de Rhodes le rapport des degrés à ceux de l'équateur se trouve être de $\frac{4}{5}$, valeur qui, sans erreur appréciable, peut être considérée comme égale au cosinus de Rhodes, 0,80901.

Si nous nous sommes étendu aussi longuement sur cette seconde projection de Ptolémée depuis longtemps abandonnée, c'est pour rectifier quelques erreurs des géographes modernes dont quelques-uns ont cru voir dans les deux projections de Ptolémée l'idée et jusqu'aux principes de la projection stéréographique, antérieure de trois cents ans, et dont d'autres ont attribué au géographe alexandrin le mérite de l'invention de la projection connue aujourd'hui sous le nom de *projection de Bonne* ou *de la carte de France.* Il suffit de remarquer, pour répondre à ces derniers, que la seconde projection de Ptolémée n'est pas le développement du cône tangent au parallèle de Syène, puisque le rayon de ce parallèle est égal a 158 degrés au lieu de 129,69, valeur de la cotangente de 23° 50′; le cône ayant son sommet au point pris pour centre commun des parallèles serait tangent à la sphère le long du parallèle de 19° 20′ environ, latitude qui s'éloigne trop de celle de Syène pour que la différence puisse être attribuée à une erreur de calcul. Il faut donc reconnaître que Ptolémée n'avait pas l'idée d'un cône tangent à la terre le long du parallèle moyen, et que sa construction est tout arbitraire.

11. Cette projection demeura oubliée pendant des siècles, jusqu'à la renaissance où *Bernard de Sylva*, d'Éboli, en publiant à Venise, en 1511, une nouvelle édition de la géographie de Ptolémée, en agrandit le cadre pour y faire entrer les terres nouvellement découvertes (1). Elle commença dès lors à se transformer entre les mains des géographes tels que *Apianus* (*Pierre Benewitz*, 1520), *Oronce*

(1) *Voir* Lelewel, Atlas de la géographie du moyen âge, pl. XLV.

Fine (1532), *Guillaume le Testu* (1566) (1), qui remplacèrent la construction arbitraire de Ptolémée par le développement du cône tangent le long du parallèle moyen et conservèrent les véritables grandeurs des degrés de chaque parallèle, de manière à déterminer chaque méridien par une série de points correspondants.

Cette nouvelle projection est généralement connue sous le nom de *projection de Bonne*, du nom du géographe français qui, en 1752, en fit le premier ressortir tous les avantages dont les principaux sont :

1° que le méridien du milieu représenté par une droite coupe tous les parallèles à angle droit ;

2° que le parallèle moyen, qui a pour rayon la cotangente de sa latitude, coupe tous les méridiens à angle droit ;

3° que les trapèzes de la surface sphérique sont représentés par des trapèzes curvilignes dont les côtés parallèles sont respectivement égaux en longueurs aux côtés qui leur correspondent sur la sphère ; et comme les hauteurs de ces trapèzes sont aussi partout égales, il en est de même de leurs surfaces ; mais à mesure qu'on s'éloigne du méridien central, ils s'allongent dans le sens de l'une de leurs diagonales et se rétrécissent dans le sens de l'autre.

C'est là le principal défaut de ce développement et ce qui le rend impropre à représenter non-seulement un hémisphère entier, mais encore une étendue considérable de pays.

Au lieu de déterminer les intersections des méridiens et des parallèles par la construction directe, on les construit en réalité à l'aide de leurs coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires, qui sont le méridien central et la tangente au parallèle moyen.

Appelons ρ_1 (fig. 54) le rayon du parallèle moyen de latitude l_1 ; nous aurons d'abord

$$OA_1 = \rho_1 = a \operatorname{cotang} l_1.$$

Désignons par δ la longueur de l'arc A_1A compris entre le parallèle moyen $C_1A_1B_1$ et le parallèle CAB du point cherché M ; δ sera la différence des latitudes de ces deux parallèles, $l_1 + \frac{\delta}{a}$ sera donc la latitude du point M. On aura

$$MA = \rho\theta = la \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right),$$

(1) *Voir* au dépôt géographique des affaires étrangères la carte manuscrite de Guillaume le Testu, qui donne le développement des deux hémisphères nord et sud, projetés en regard l'un sous l'autre, chacun sur le parallèle moyen respectif de 15°.

$$\rho = \rho_1 - \delta = a \operatorname{cotang} l_1 - \delta,$$
$$x = \mathrm{MQ} = \rho \sin\theta, \quad y = \mathrm{MP} = \rho_1 - \rho\cos\theta = a \operatorname{cotang} l_1 - \rho \cos$$

Il est facile de tenir compte, dans ces calculs, de la forme sphéroïdale de la terre; il faut pour cela multiplier cotang l_1 par la grande normale N_1 et remplacer l'arc sphérique δ par l'arc elliptique S. On aura alors

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}}; \quad \rho_1 = N_1 \operatorname{cotang} l_1,$$
$$\rho = N_1 \operatorname{cotang} l_1 - S; \quad \theta = \frac{t N_1 \cos\left(l_1 + \frac{\delta}{a}\right)}{\rho},$$

en ayant soin de remplacer, dans la valeur de θ, $\frac{\delta}{a}$ par le nombre de degrés qui exprime la différence des latitudes du parallèle considéré et du parallèle moyen. Les coordonnées se calculent ensuite par les formules

$$x = \rho \sin\theta; \quad y = \rho_1 - \rho\cos\theta.$$

Cette projection, très-employée depuis Bonne par *de l'Isle*, *d'Anville* et d'autres géographes pour les cartes générales telles que celles des quatre parties du monde, a été adoptée dès 1803 par le *Dépôt de la guerre*, comme répondant le mieux aux besoins des divers services publics, et notamment pour la construction de la grande carte de France levée par les officiers d'état-major. Comme elle est presque universellement employée aujourd'hui pour les cartes topographiques détaillées basées sur un levé trigonométrique, nous y reviendrons longuement, ainsi que nous l'avons déjà annoncé au chapitre des projections équivalentes, et nous étudierons alors les altérations d'angles et de longueurs ainsi que des détails de construction.

La projection n° XVII représente un hémisphère entier développé sur le parallèle moyen de 45°; quoique la projection de Bonne ne doive jamais être employée pour des différences de latitudes et de longitudes aussi considérables, nous donnons cette application parce qu'elle montre bien les avantages aux environs du méridien central et du parallèle moyen, et les défauts à mesure qu'on s'en éloigne.

15. Si l'on prend pour parallèle central du développement l'équateur lui-même, le sommet du cône s'éloigne à l'infini et les parallèles sont alors représentés par des droites parallèles, espacées et divisées

comme le sont les parallèles du globe. Il résulte de cette construction, dont la projection, figure n° XVIII, offre l'application à la représentation de la surface terrestre entière, que, dans le sens des parallèles, la carte a partout des dimensions égales à celles du globe, et que les surfaces sont aussi partout conservées (1), comme dans la projection précédente dont celle-ci n'est qu'un cas particulier; mais la déformation y est plus considérable encore à cause de l'obliquité qu'y prennent les méridiens dès qu'on s'éloigne du méridien central et de l'équateur; de même aussi les distances ne peuvent être rigoureusement mesurées que sur les méridiens et les parallèles, et sont très-altérées dans le sens des diagonales de chaque trapèze; ce système ne peut donc convenir que pour représenter des pays peu étendus en latitude et traversés par l'équateur; c'est celui que l'on adopte généralement pour les cartes d'Afrique.

Les formules de la projection précédente deviennent, en prenant pour axes des coordonnées l'équateur et le méridien principal,

$$y = \frac{\pi}{180} al,$$
$$x = \frac{t\pi}{360} a \cos l = \mathrm{K} \cos \frac{y}{a}.$$

L'équation $x = \frac{y}{a}$ étant celle d'une sinusoïde, nous adopterons avec M. d'Avezac, pour désigner cette projection, le nom de *sinusoïdale* qui, en rappelant la nature des courbes méridiennes, en indique de suite la forme.

Il est très-facile d'y tenir compte de l'aplatissement de la terre, en ne divisant plus le méridien du milieu en parties égales, mais en prenant ces parties de mêmes longueurs croissantes vers le pôle que les arcs de 1° du méridien elliptique. En outre, on portera sur chaque parallèle les longueurs correspondantes des arcs de longitude calculées dans la table I; l'ordonnée x sera donnée par la formule

$$x = \frac{t\pi}{360} \mathrm{N} \cos l,$$

en continuant de désigner par N la grande normale

$$\mathrm{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

(1) *Voir* chap. III, § 6.

Cette projection a été imaginée par Nicolas *Sanson* d'Abbeville qui, en 1650, publia les cartes de l'Europe, de l'Asie, de l'Afrique et des deux Amériques, dans ce système de représentation (1).

Cinquante ans plus tard, l'astronome anglais Jean *Flamsteed* employa cette projection devenue usuelle en France pour la rédaction de son atlas céleste publié seulement en 1729; c'est donc contre toute justice qu'elle est vulgairement désignée sous le nom de cet astronome.

16. Au lieu de porter à l'infini le sommet du cône tangent à la sphère dans la projection du Dépôt de la guerre, nous pouvons supposer que ce sommet se rapproche de la surface de la sphère jusqu'à se confondre avec le pôle; le cône devient alors un plan tangent et les parallèles sont encore représentés par des arcs de cercle équidistants ayant tous le pôle pour centre; si l'on porte sur chacun d'eux des longueurs égales à celles qui leur correspondent sur la sphère, la projection que l'on obtient a pour formules

$$\rho = az; \quad \theta = \frac{t \sin z}{z},$$

et conserve, comme les deux précédentes, la propriété de représenter les surfaces en véritable grandeur; elle est due à *Jean Werner*, de Nüremberg, qui, en 1514, à la suite d'une traduction avec commentaire du premier livre de la Géographie de Ptolemée, indique trois systèmes de représentation du monde entier avec des parallèles concentriques autour du pôle et équidistants; dans le premier cas l'équateur est représenté par un cercle entier et divisé en 360° plus grands évidemment que les degrés de latitude, dans le rapport du quadrant au rayon (projection n° XIX); dans le second cas, dont nous venons de parler et qui seul conserve les surfaces, les degrés de l'équateur sont faits égaux aux degrés de latitude, ce qui réduit à environ 229° 11′ l'angle au pôle sous-tendu par l'arc qui représente l'équateur; enfin, dans le troisième cas, les 360° de l'équateur sont représentés par un arc de cercle de 240°, ce qui attribue aux degrés de longitude une valeur un peu plus forte qu'aux degrés de latitude, à peu près dans le rapport de l'arc de 30° à son sinus. Dans les trois cas les degrés de longitude sont déterminés sur chaque parallèle conformément à leur rapport réel avec le degré équatorial.

(1) *Voir* l'atlas in-folio n° 3377, au département géographique de la bibliothèque Impériale. Ces cartes ont été plusieurs fois rééditées.

Le canevas n° XXXII donne l'application de la troisième projection de Werner à la représentation de la surface entière du globe.

17. Les projections coniques et leurs modifications dont nous avons parlé jusqu'ici ont toutes pour but principal de substituer à la zone sphérique que l'on veut représenter une zone développable sur laquelle les méridiens et les parallèles sont supposés tracés de manière que le développement jouisse de telle propriété que l'on veut. Ces projections conviennent surtout pour représenter des zones étroites, c'est-à-dire peu étendues de part et d'autre d'un parallèle moyen que les méridiens coupent à angle droit et sur lequel la projection atteint son plus grand degré de perfection.

Il n'en est plus de même lorsque le pays à représenter est très-étendu en latitude ou composé d'États détachés tels que les États-Unis, parce qu'il devient alors impossible de choisir un même parallèle central pour chacun d'eux ; aussi l'Amérique et l'Angleterre ont-elles adopté, pour le tracé des cartes embrassant une grande portion de la surface terrestre, un système qui a pour but de remplacer chaque zone terrestre élémentaire par la zone conique élémentaire correspondante et de conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles.

Cette projection a reçu en Amérique le nom de *projection polyconique rectangulaire* qui en peint de suite le tracé.

Considérons le cas général du sphéroïde entier développé le long d'un méridien central quelconque. Au pôle nord le cône tangent se confond avec le plan tangent et, à mesure qu'on s'éloigne du pôle, son sommet se recule le long de l'axe terrestre prolongé en donnant à chaque parallèle du développement un centre de plus en plus reculé et un rayon qui croît à mesure que la latitude diminue et qui est partout égal à la cotangente de cette latitude. A 45° de latitude les rayons de la terre et du parallèle sont égaux ; enfin, le cône devient un cylindre à l'équateur qui est représenté par une droite perpendiculaire aux méridiens. Dans l'hémisphère austral le cône occupe par rapport à l'équateur des positions symétriques à celles qu'il a occupées dans l'hémisphère boréal ; la courbure des parallèles croît ainsi en sens inverse jusqu'au pôle antarctique représenté comme le pôle nord par un point situé à 90° de l'équateur. On obtient ainsi une figure à deux axes rectangulaires (proj. n° XXXVI) dont le plus petit est le méridien central rectifié, et dont le plus grand, double du premier, représente l'équateur entier développé.

Le méridien-limite, qui est en réalité la seconde moitié du méridien central, s'allonge, de chaque côté de la figure, de plus de deux fois et demie sa longueur véritable. Les méridiens sont comme sur la sphère et sur chacun des cônes assujettis à couper chaque parallèle à angles droits. Mais comme il est impossible de conserver à la fois les angles et les surfaces, il en résulte une altération très-sensible dans les longueurs des degrés de parallèles dont l'équateur est le seul qui conserve ses véritables dimensions.

Un autre défaut important consiste dans l'inégalité des distances méridiennes entre les parallèles successifs et dans l'accroissement des degrés des méridiens à mesure que l'on s'éloigne du méridien central seul développé en vraie grandeur. Ce défaut rend impossible l'emploi d'une échelle pour la mesure, même approchée, des longueurs, dans des directions autres que l'équateur et le méridien central.

Nous étudierons plus loin cette projection d'après l'exposé qui en a été donné en 1860 par le colonel *H. James*, directeur du Département topographique du bureau de la Guerre (1), et nous donnerons des tables qui en facilitent la construction.

Le colonel James, pour rendre compte de cette projection, suppose d'abord la terre représentée par un globe creux et très-mince, en papier par exemple, que l'on coupe par un grand nombre de plans parallèles passant par les parallèles terrestres équidistants en latitude; on coupe encore ce globe le long du demi-méridien opposé à celui qui doit servir de méridien central, et l'on ouvre le globe entier sur un plan de manière à considérer chaque bande de la surface du globe comme une portion d'une ceinture circulaire, à l'exception de l'équateur qui se développe en ligne droite. Tous les points de chaque parallèle se placent sur un arc de cercle dont le rayon est égal à la cotangente de la latitude correspondante, et les centres de tous ces cercles sont sur la droite qui représente le méridien central. Cette manière d'envisager la projection polyconique rectangulaire laisse beaucoup à désirer, car, après le développement de chaque ceinture circulaire, il reste nécessairement un espace qui provient de

(1) *Description of the Projection used in the Topographical Deportment of the War Office for maps embracing large portions of the Earth's Surface (drawn up by Capt.* CLARKE, R. E. *ond) communicated by Colonel Sir Henry* JAMES, R. E. *Director of the Topographicol Department*; dans *the Journal of the Royal Geographical Society*, Vol. XXX, Londres, 1860, in-8, p. 106 à 111.

la différence des rayons de chacune d'elles, et qui n'est négligeable à aucune limite puisqu'il est du même ordre de grandeur que l'accroissement du rayon de chaque zone ; il n'est possible de le faire disparaître, lorsque l'on veut conserver la rectangularité des méridiens et des parallèles, que par une déformation en longueur de chaque cercle de latitude.

18. Il peut être préférable, dans certains cas, de conserver les longueurs des degrés de tous les parallèles en renonçant à leur perpendicularité sur les méridiens. On obtient ainsi une nouvelle projection dite *polyconique ordinaire*, qui appliquée à la représentation de la surface entière du globe (proj. n° XXXVII) présente une figure à deux axes rectangulaires et à quatre quadrants égaux comme la projection rectangulaire. Le méridien central, seul perpendiculaire aux parallèles, est encore développé en vraie grandeur ; sur chaque parallèle décrit avec la cotangente de sa latitude, on porte les véritables longueurs des degrés de longitude et l'on fait passer, par les points correspondants, des courbes qui représentent les méridiens.

Nous reviendrons sur cette projection (1), et nous donnerons les moyens de tenir compte de l'aplatissement de la terre à l'aide de tables qui rendent la construction très-rapide.

La projection polyconique ordinaire a été adoptée en Amérique par le *Coast Survey Office* parce que « les opérations de l'hydro-« graphie étant limitées à une bande étroite et longue de la côte et « n'ayant pas pour but de former une carte d'ensemble des pays en « feuilles régulières et uniformes, il est préférable de faire une pro-« jection indépendante pour chaque lever et pour chaque feuille hy-« drographique à l'aide de son méridien central ; chaque feuille est « ainsi projetée comme une carte locale et se relie aux autres par les « sommets de la triangulation (2). »

La carte du congrès a été dressée en 1855 en projection polyconique à l'échelle de $\frac{1}{1800000}$ (3).

---

(1) *Voir* 2e part., chap. XIII, § 3.

(2) *Report of the Superintendant of the Coast Survey during the year* 1853. Washington, 1854 ; *Appendice n°* 39, p. 99.

(3) Les méridiens et les parallèles y sont tracés de minute en minute ; le méridien central pour la côte orientale a été pris à 84° à l'ouest de Greenwich (86° 20′ 9″ à l'ouest de Paris), et pour la côte occidentale à 120° de Greenwich (122° 20′ 9″ à l'ouest de Paris) ; les deux côtes ont ainsi été projetées séparément. Cette carte comprend la côte entière des États-Unis depuis la baie de Passamaquoddy (limite nord du Maine) jusqu'au Mexique (embouchure de Rio Grande), et depuis le Rio Frazer jusqu'à San Diego.

19. La méthode de projection employée au *Coast Survey Office* pour les cartes de localités ou pour les petits levers hydrographiques prend le nom de *projection polyconique équidistante.* Les parallèles provisoires et les méridiens y sont d'abord tracés comme dans la projection polyconique ordinaire, puis on porte sur chaque méridien au-dessus et au-dessous du parallèle central, les longueurs des divisions du méridien central, et l'on fait passer les parallèles définitifs par les points ainsi obtenus. Il en résulte une projection dans laquelle les parallèles sont partout à des distances méridiennes égales. Si on la suppose appliquée à la représentation de la surface entière du globe, et que l'on prenne l'équateur pour parallèle central, tous les parallèles tournent leur concavité vers l'équateur, car les distances méridiennes des parallèles étant égales à ces distances mesurées sur le méridien central qui est une ligne droite, il est évident que les parallèles devront converger en s'éloignant du méridien central. Le parallèle de 90°, c'est-à-dire le pôle, sera représenté par une courbe dont la longueur approchera de celle de l'équateur développé.

En comparant une projection polyconique équidistante avec une projection de Bonne ayant même méridien central et même parallèle moyen, il est facile de voir que, sur la première, l'aire projetée est moindre que la surface correspondante de la sphère. Cette projection a en outre l'inconvénient d'augmenter d'une manière exagérée les arcs de parallèle et de rendre impossible l'emploi d'une même échelle autour d'un même point; les intersections des méridiens et des parallèles n'y sont pas rectangulaires et les angles sont difficiles à calculer. Il en résulte que ce système ne doit être employé que dans les limites les plus restreintes. Dans le bureau hydrographique des États-Unis il n'est employé que pour représenter des surfaces de *un* degré carré *au plus*, à une échelle ne dépassant par $\frac{1}{10000}$.

Lorsque l'on veut représenter en projection polyconique ordinaire, un hémisphère entier à une échelle peu considérable, on peut figurer le méridien de 90° de longitude, qui doit limiter la carte, par une circonférence décrite sur la distance des pôles comme diamètre, et partager en parties égales les arcs de parallèle interceptés; les autres méridiens seront des courbes passant par les points correspondants ainsi obtenus.

PROJECTIONS CYLINDRIQUES.

20. Jusqu'à présent, dans l'étude des projections par développement, nous ne nous sommes occupé que de celles qui peuvent être considérées comme obtenues par le développement d'un ou de plusieurs cônes tangents ou sécants au sphéroïde, et des projections qui peuvent être considérées comme des modifications des projections coniques. Au lieu de considérer le tronc de cône qui, sous certaines conditions dépendant du but que doit atteindre la carte, se rapproche le plus possible de la portion du sphéroïde à représenter, il est naturel de chercher à représenter une portion de la surface du globe par le développement d'une portion de surface cylindrique soit inscrite, soit circonscrite à la zone considérée et dont l'axe coïncide avec celui du globe. Les méridiens, qui résultent des sections du cylindre par des plans passant par son axe, seront représentés par des droites parallèles à cet axe, les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières.

Les défauts des projections cylindriques sont plus considérables encore que ceux de la projection conique, car, dans celle-ci, on peut donner à deux parallèles leur véritable longueur par rapport aux degrés de latitude, tandis que dans la projection cylindrique le parallélisme des méridiens ne permet d'observer cette proportion qu'à l'égard d'un seul qui est l'inférieur, si l'on considère le développement du cylindre circonscrit, et le supérieur si l'on considère au contraire le développement du cylindre inscrit.

Pour remédier à cet inconvénient, on a employé le cylindre construit sur l'un des parallèles intermédiaires et qui est par conséquent en partie intérieur et en partie extérieur à la sphère ; de cette manière l'étendue en longitude est exacte vers le milieu, mais trop petite du côté de l'équateur et trop grande du côté opposé.

21. Dans la *projection cylindrique proprement dite*, on donne aux degrés de latitude leur véritable longueur de façon que chaque méridien A_1B_1 de la projection (fig. 55) soit égal au développement de l'arc correspondant AB du méridien de la sphère.

En appelant l la latitude du parallèle Mm commun à la sphère et au cylindre, les degrés de longitude seront sur tous les parallèles de la projection égaux à



$$\frac{2\pi}{360} a \cos l_1 .$$

La figure 55 montre bien les défauts de ce système, l'agrandissement des parallèles supérieurs et la diminution des parallèles inférieurs. La projection n° XXXIV donne la représentation de l'hémisphère Nord développé sur le parallèle de 45° de latitude.

Les cartes projetées d'après ce système portent le nom de *cartes plates parallélogrammatiques ;* elles ne peuvent convenir que, à des parties du globe très-peu étendues en latitude, mais autant qu'on le veut en longitude ; les moins défectueuses sont celles qui représentent les portions voisines de l'équateur, parce que, à peu de distance de ce cercle, les cosinus de latitude ne varient pas beaucoup ; d'*Anville* s'en est servi avec avantage pour la carte de Guinée publiée en 1776. Cette construction est la plus ancienne de toutes ; son origine semble remonter jusqu'à *Anaximandre* (550 ans environ av. J.-C.) qui, le premier peut-être, traça une carte géographique du monde connu de son temps ; elle continua à être employée par les géographes de l'antiquité (*Hécatée*, *Dicéarque*, *Eratosthènes*, *Agrippa*, *Strabon*, *Marin de Tyr*, *Ptolémée*) qui prenaient pour parallèle moyen celui de Rhodes.

22. Lorsque le cylindre est tangent le long de l'équateur, le réseau est formé de carrés parfaits ; il en résulte une projection très-simple de construction, mais très-erronée dès qu'on s'écarte de l'équateur puisque les degrés de longitude y sont partout égaux aux degrés de latitude (proj. n° XXXIII) ; on la désigne sous le nom de *projection plate carrée ;* l'invention en a à tort été attribuée au prince *Henri* de Portugal (1438) ; elle était connue, dès le commencement du XIVe siècle, des navigateurs génois (1), qui la communiquèrent aux Catalans ; mais elle n'est plus employée depuis le commencement du XVIe siècle. Elle offrait aux marins cet avantage de représenter par une ligne droite la *loxodromie*, c'est-à-dire la direction que suit le navire naviguant pendant quelque temps sous le même rumb de vent et coupant par conséquent tous les méridiens sous le même angle (2).

---

(1) Les cartes nautiques les plus célèbres qui nous sont parvenues de cette époque sont : l'atlas de *Petrus Vesconte de Janua* (1318), les cartes de *Marin Sanuto* (1321), l'atlas anonyme de 1351 de la bibliothèque Laurentienne de Florence, l'atlas catalan de 1375, l'atlas vénitien de 1384, etc. *Voir* les *Monuments de la géographie*, par JOMARD, 4e livraison.

(2) L'emploi de la boussole rend presque exclusive la navigation loxodromique ; la courbe décrite à la surface des mers par un navire se rendant d'un point à un autre n'est donc pas un arc de grand cercle, mais une courbe à double courbure dont la principale

Mais les cartes plates avaient l'énorme inconvénient non-seulement de déformer beaucoup les configurations terrestres, mais encore de fausser les directions et les gisements de telle sorte que les directions E.-O. et N.-S. de la rose des vents étaient seules conservées et que les autres étaient difficiles à tracer exactement. Cet inconvénient avait déjà été remarqué par Ptolémée; il fut de nouveau signalé au commencement du XVI[e] siècle par Martin *Cortès*, puis par *Pero Nunès;* enfin, en 1569, *Gérard Mercator*, considérant que les marins n'emploient pas leurs cartes pour connaître la figure des pays, mais seulement pour y tracer exactement le chemin parcouru d'après sa longueur et sa direction, et pour déterminer la distance où ils sont des divers points des îles et la direction qu'ils doivent suivre soit pour y arriver, soit pour les éviter, imagina la *projection des cartes réduites.*

23. La nécessité de représenter la loxodromie par une ligne droite mettait dans l'obligation de figurer les méridiens par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires aux parallèles et de considérer par conséquent la projection comme le développement d'un cylindre tangent à la sphère le long de l'équateur ; en outre, l'obligation de conserver partout les directions devait faire conserver le rapport exact des degrés de latitude aux degrés de longitude ; or comme les derniers, par suite du parallélisme des méridiens, sont tous augmentés dans le rapport de l'unité au cosinus de leur latitude, il faut augmenter aussi les degrés de latitude dans le même rapport.

Or, en supposant la terre sphérique, on a

$$\frac{\text{un degré de parallèle}}{\text{un degré de l'équateur}} = \frac{\text{cosinus latitude}}{1} = \frac{1}{\text{sécante } l},$$

donc

$$\text{un degré de méridien} = \text{un degré de parallèle} \times \text{séc } l;$$

de même

$$\text{une minute de méridien} = \text{une minute de parallèle} \times \text{séc } l.$$

Il résulte de là qu'en faisant constamment sur la carte réduite la minute de parallèle égale à celle de l'équateur, l'intervalle entre

---

propriété est de couper sous le même angle tous les méridiens qu'elle traverse; ainsi une ligne loxodromique qui fait un angle oblique avec un méridien est une sorte de spirale qui s'approche sans cesse de l'un des pôles sans jamais l'atteindre; s'il était possible en effet qu'une telle ligne passât par le pôle, il faudrait qu'elle fît en ce point le même angle avec tous les méridiens, ce qui est impossible.

deux parallèles consécutifs ou la différence de leurs distances à l'équateur répondant à une minute doit être égale à

$$\text{une minute de l'équateur} \times \text{séc}\, l.$$

L'intervalle entre deux parallèles quelconques sera par conséquent égal à la longueur d'une minute de l'équateur multipliée par la somme des sécantes faite de minute en minute depuis la plus petite latitude jusqu'à la plus grande.

C'est sur ce principe que Mercator fit construire une grande mappemonde publiée à Duysbourg en août 1569 (1) ; *Edouard Wright*, auquel on a à tort attribué l'invention des cartes réduites (2), expliqua le premier en 1589 les procédés de calcul comme nous venons de le faire et dressa une table des parties du méridien ; mais ce procédé pour calculer les accroissements des parties méridiennes n'est pas rigoureux, puisque l'arc d'*une minute*, malgré sa petitesse, diffère sensiblement de sa corde ; il faudrait donc supposer la minute elle-même divisée en un nombre infini de parties et faire la somme de tous les accroissements successifs ; *Henry Bond*, en 1645, montra le premier que les longueurs des méridiens projetés croissent comme le logarithme de la tangente de la moitié du compliment de la latitude. Le calcul intégral conduit très-rapidement à ce résultat et permet de tenir compte de l'aplatissement de la terre ; nous reviendrons sur ce sujet en traitant de la construction et de l'usage des cartes réduites. Remarquons de suite que, comme la sécante de 90° est infinie, le pôle ne peut être représenté sur ces cartes et que les parallèles s'écartent de plus en plus et jusqu'à l'infini à mesure que la latitude augmente. Cet inconvénient est peu sensible dans la navigation parce que le 83e degrés de latitude constitue la limite de notre connaissance des terres à la surface du globe.

21. Le célèbre astronome *César-François Cassini* a employé, pour l'exécution de sa carte de France commencée en 1745 et terminée en 1793 par son fils (*Jacques-Dominique*), une modification de la projection plate dans laquelle le cylindre est tangent le long du

(1) Cette carte, large de 2 mètres sur 1m,26, se trouve reproduite en fac-simile dans les *Monuments de la géographie* de JOMARD (8e livraison) et dans un appendice à la *Géographie du moyen âge*, de LELEWEL (t. II, p. 225 à 233).

(2) Édouard WRIGHT dans son ouvrage, *Certain Errors in Navigation detected and corrected*, p. 12 et 13 de la préface, reconnaissait lui-même que la carte de Mercator lui avait servi de guide et qu'il avait seulement deviné la méthode dont le géographe allemand n'avait pas fait part au public.

méridien principal ; par les divisions de l'équateur on imagine des plans parallèles à ce méridien, et par les divisions du méridien des grands cercles qui ont un diamètre commun situé dans le plan de l'équateur ; ce diamètre est, dans la projection de Cassini, ce qu'est la ligne des pôles dans la projection plate. On imagine ensuite le cylindre développé, et les génératrices passant par les divisions du méridien représentent les grands cercles perpendiculaires à ce méridien, tandis que les petits cercles qui lui sont parallèles ont pour projections les développements des intersections du cylindre par leurs plans.

Cassini a été conduit à adopter cette projection parce que, dans les levers trigonométriques, s'il est facile de tracer le méridien d'un lieu, il ne l'est plus autant de tracer le parallèle à l'équateur ; si, par un alignement, dirigé au moyen de piquets verticaux, et perpendiculaire au méridien d'un lieu on détermine une suite de points, ils appartiennent au grand cercle que détermine le plan vertical mené perpendiculairement au méridien dont il s'agit et qui, sur la terre, répond au cercle céleste que l'on nomme premier vertical ; le parallèle ne fait que toucher ce cercle au point où il coupe le méridien. La méridienne et ses perpendiculaires étant donc les lignes qui se tracent le plus facilement par les opérations astronomiques et géodésiques, c'est au méridien de l'Observatoire de Paris et à ses perpendiculaires qu'ont été rapportés immédiatement les points de la carte de France ; leurs latitudes et leurs longitudes n'ont été conclues qu'*à posteriori* et par le calcul.

Nous reviendrons sur cette projection pour donner les équations exactes des méridiens et des parallèles, évaluer les erreurs des surfaces et des angles et tenir compte de l'aplatissement. Mais nous pouvons dès à présent nous rendre compte de ses principaux défauts.

En supposant la terre sphérique, les grands cercles perpendiculaires au méridien, au lieu de se couper aux pôles de ce méridien et par conséquent de converger tous les uns vers les autres, sont, en projection, tous parallèles entre eux ; il en résulte que les portions déterminées par deux cercles perpendiculaires au méridien sont représentées par des rectangles de même longeur, mais plus larges vers les extrémités. Ainsi les distances et les aires ne peuvent être mesurées immédiatement sur la carte de Cassini que par approximation, et quoique l'étendue en longitude ne soit pas assez considérable pour que la convergence des perpendiculaires au méridien entraîne

une erreur importante, il faut être très-réservé dans l'emploi de cette projection, qui n'est excellente que pour la réunion immédiate des levés trigonométriques.

25. Nous avons déjà parlé, au chapitre des projections équivalentes (1), d'une projection cylindrique due à Lambert, et jouissant de la propriété de représenter les surfaces de la sphère par des surfaces égales. Elle est basée sur ce principe que si l'on circonscrit un cylindre circulaire droit à une sphère et que l'on coupe les deux surfaces par une série de plans parallèles au grand cercle de contact, on détachera des zones qui seront toutes respectivement égales.

On a en effet (fig. 56), en considérant le cylindre tangent le long de l'équateur,

$$\text{surf. cylindr. AIEE'A'} = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l,$$
$$\text{zone sphérique } a\text{EE'}a' = 2\pi a C\alpha = 2\pi a \sin l;$$

et comme les méridiens interceptent sur les deux surfaces des parties proportionnelles à leurs différences de longitude, les surfaces élémentaires sont respectivement égales.

Cette projection a l'inconvénient de faire croître les distances en latitude comme les sinus de ces latitudes, et par conséquent de rapprocher de plus en plus les parallèles à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur, tandis que les degrés de longitude conservent partout la longueur qu'ils ont à l'équateur et sont par conséquent partout augmentés.

Si l'on appelle α l'angle d'une direction quelconque avec le méridien d'un point M sur la sphère, β l'angle correspondant sur la carte, l la latitude de ce point M, on trouve facilement par une méthode semblable à celle que nous avons employée (2) pour étudier les altérations des projections zénithales

$$\tang\beta = \tang\alpha \frac{1}{\cos^2 l}.$$

Il en résulte que la déviation maximum correspond en chaque point à

$$\tang A = \pm \cos l,$$

ou à

$$\tang B = \pm \frac{1}{\cos l},$$

(1) *Voir* chap. III, § 2.
(2) *Voir* chap. V, § 11.

les signes se correspondant, et qu'en chaque point il existe une infinité de groupes de deux directions définies par la relation

$$\tang \alpha_1 \tang \alpha = \cos^2 l,$$

sur la sphère, et par la relation

$$\tang \beta_1 \tang \beta = \frac{1}{\cos^2 l}$$

sur la carte. On voit en outre que les éléments du méridien sont réduits sur la carte dans le rapport de $\cos l$ à l'unité, et que les éléments du parallèle sont augmentés dans le même rapport (1).

En résumé, ce système n'est applicable qu'aux zones comprenant l'équateur et peu étendues en latitude.

26. Nous avons parlé (2) de la modification proposée par Lambert pour les pays tels que l'Amérique qui ont leur plus grande étendue du nord au sud; on suppose le cylindre tangent non plus le long de l'équateur mais le long du méridien moyen; dans le développement l'équateur est représenté par une droite divisée suivant les sinus des longitudes et le méridien central par une droite divisée en degrés égaux.

Lambert, après avoir exposé sa projection isocylindrique, est parvenu à celle-ci par une simple transformation de coordonnées que nous allons exposer parce que l'illustre géomètre l'a plusieurs fois appliquée pour passer d'un système de projection cylindrique à un autre analogue.

Soit A (fig. 57) un point quelconque pris pour pôle d'un grand cercle PKS, B l'autre pôle. Considérons deux grands cercles APBS, AKB passant par A et B et que nous pourrons appeler des méridiens relatifs à A et B ; PKS sera l'équateur. Supposons que dans ce système de coordonnées les longitudes t' soient comptées à partir du méridien AKB.

Pour représenter d'après la méthode isocylindrique de Lambert la surface de la sphère ainsi traversée par les méridiens et les parallèles, on portera (fig. 58) sur une droite ps, de part et d'autre du point K, des longueurs égales aux longitudes t', c'est-à-dire aux arcs de grand cercle PS rectifiés, et sur une perpendiculaire ab à ps, des longueurs

(1) L'étude des altérations dans cette projection a été faite par M. Collignon (*Journal de l'École Polytechnique*, 41ᵉ *cahier*) pour montrer la possibilité de construire les mappemondes mixtes en trois parties dont nous avons parlé au § 15 du chap. III.

(2) *Voir* chap. III, § 3.

kr égales aux sinus à $\sin l'$ des parallèles tels que WRE ; en élevant par les points de division ainsi obtenus des perpendiculaires ou des parallèles à ps, on achèverait la construction du réseau isocylindrique dont les degrés de longitude seraient égaux, mais dont ceux de latitude iraient en diminuant de K à a.

Soient maintenant P et S les pôles véritables de la sphère et AKB l'équateur véritable ; PKS est un méridien dont les pôles sont en A et B et qui est déjà représenté par une droite ps divisée en degrés égaux ; p et s figureront les pôles véritables. L'équateur réel AKB est représenté par une droite ab dont les arcs à partir du centre K sont dans le rapport des sinus des longitudes des méridiens tels que PYS, car les arcs qui, dans l'hypothèse des pôles en AB, mesurent sur le grand cercle AKB les latitudes, mesurent maintenant les longitudes dans l'hypothèse des pôles en P et S.

Considérons un point quelconque M de la surface de la sphère et menons l'arc de grand cercle AMD qui sera perpendiculaire sur le méridien du milieu PKS puisque le pôle de ce méridien est supposé en A. Ce grand cercle était, dans la première hypothèse, un méridien représenté par une perpendiculaire à p passant par un point d tel que Kd est égal à l'arc KD ; et, sur cette perpendiculaire, le point M devait se trouver placé à une distance md de ps, égale au sinus de l'arc MD.

Cherchons donc à exprimer les arcs $DK = y$ et MD dont le sinus égale $md = x$, en fonction de la latitude l et de la longitude t du point M.

Dans le triangle sphérique PTD, rectangle en D, on connaît l'hypoténuse $PM = 90° - l$ et l'angle $MPD = t$; on calculera MD et $PD = 90° - y$ à l'aide des formules

$$\sin MD = x = \cos l \sin t,$$

et

$$\operatorname{cotang} PD = \operatorname{tang} KD = \operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{cotang} MP}{\cos MPD} = \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t},$$

qui sont bien les mêmes que celles auxquelles nous sommes parvenus directement.

27. La même méthode de transformation de coordonnées permet d'obtenir immédiatement les équations de la projection *cylindrique orthomorphe de Lambert* (1) en la considérant comme une projection

(1) *Voir* chap. II, § 14.

de Mercator renversée. En se reportant en effet aux deux figures précédentes on voit que l'arc DK devra être projeté en vraie longueur et que l'arc de grand cercle MD devra être représenté par une droite perpendiculaire à *pks* et égale à

$$md = \log \operatorname{tang} \frac{90^\circ + \mathrm{MD}}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \mathrm{MD}}{1 - \sin \mathrm{MD}};$$

or le triangle rectangle PMD nous a donné

$$\sin \mathrm{MD} = \cos l \sin t,$$
$$\operatorname{cotang} \mathrm{DK} = \cos t \operatorname{cotang} l.$$

Les équations de la projection seront donc

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin t}{1 - \cos l \sin t},$$
$$\operatorname{cotang} y = \cos t \operatorname{cotang} l,$$

qui sont bien les équations auxquelles nous sommes parvenus par la méthode des coefficients indéterminés.

28. Revenons aux projections cylindriques équivalentes. Lorsqu'il s'agit de représenter une portion de zone qui n'est pas contiguë à l'équateur, on imagine un cylindre sécant le long d'un parallèle de la zone à représenter, et, en partie inscrit, en partie circonscrit; on peut alors déterminer l'espacement des parallèles par la condition de conserver les surfaces élémentaires.

Appelons d (fig. 59) la distance en projection d'un parallèle de latitude l au parallèle commun MM' dont nous désignerons la latitude par l_1.

Sur le cylindre la zone $\mathrm{MM'D_1D'_1}$ a pour surface

$$2\pi a d \cos l_1,$$

et, sur la sphère, la zone MM'DD' comprise entre les deux latitudes l et l_1 est exprimée par

$$2\pi a^2(\sin l - \sin l_1) = 4\pi a^2 \sin \frac{l - l_1}{2} \cos \frac{l + l_1}{2}.$$

On aura donc

$$d = \frac{2a \sin \frac{l - l_1}{2} \cos \frac{l + l_1}{2}}{\cos l_1},$$

Le parallèle MM′ commun aux deux surfaces et donné par la condition de conservation des degrés de longitude à la latitude l_1.

29. Lorsqu'on a à représenter une zone terrestre étroite et longue dirigée obliquement à l'équateur, on peut recourir au développement du cylindre tangent à la sphère le long du vertical qui coïncide avec la plus grande longueur de la zone à représenter. On forme ainsi un équateur et des méridiens provisoires que l'on projette sur le cylindre tangent pour le développer ensuite, et le tracé des méridiens et des parallèles véritables s'obtient par une transformation de coordonnées.

Le lieutenant *Textor* a traité cette question (1) dont l'idée première est due à Lambert, en s'imposant cette autre condition que la surface *totale* de la zone cylindrique fût égale à la zone sphérique à représenter ; il suffit pour cela d'imaginer un second cylindre, intérieur ayant un rayon un peu plus petit que celui de la sphère mais la même hauteur que le cylindre en contact, c'est-à-dire la longueur des méridiens auxiliaires contenus dans la bande étroite. Si des deux côtés de l'équateur auxiliaire on a à représenter n degrés, en appelant r le rayon de base du cylindre intérieur, g la longueur d'un degré évaluée en parties du rayon a, la surface de la zone cylindrique est exprimée par

$$2.\pi.r.2.n.g;$$

celle de la zone sphérique par

$$2\pi a\, 2a \sin n^\circ;$$

ce qui donne l'équation

$$rng = a^2 \sin n^\circ,$$

d'où

$$r = \frac{a^2 \sin n^\circ}{ng} = \frac{a.180.\sin n^\circ}{\pi n};$$

il faudra donc d'abord multiplier chacune des parties de l'équateur auxiliaire par le rapport $\frac{180 \sin n^\circ}{\pi n}$. On représentera ensuite cet équateur auxiliaire par une droite parallèle aux bords supérieur et inférieur de la carte à construire, et on la divisera en degrés comme nous venons de le voir; une droite perpendiculaire sur le milieu de la première représentera le méridien véritable qui passe par le pôle

(1) *Vorschlag zu einer Projection eines langen und schmalen Streifens der Erdfläche, dessen Richtung mit dem Æquatar einen schiefen Winkel macht, von dem Premier Lieutenant von* TEXTOR ; dans la *Monatliche Correspondenz* de ZACH, septembre 1808, p. 185 à 196.

auxiliaire. En appelant λ la latitude de son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire, θ la différence des longitudes de ce méridien et d'un autre considéré, μ la distance de ces points d'intersection de l'équateur auxiliaire et de ces deux méridiens, α l'inclinaison de ce méridien considéré sur cet équateur, l_1 la latitude du point d'intersection de ces deux cercles, on obtient

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang}\mu = \operatorname{tang}\theta\cos\lambda,$$
$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos\theta}.$$

On peut donc construire par points un méridien quelconque en prenant son point d'intersection avec l'équateur auxiliaire pour origine des abscisses x et cet équateur pour leur axe. Pour un point dont la latitude sera l on aura

$$\sin y = \sin(l - l_1)\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(l - l_1)\cos\alpha.$$

Si $l < l_1$, x et y deviennent négatifs.

En réunissant par des courbes continues les points de même latitude, on obtiendra les parallèles de la projection.

Ce genre de projection, qui exige des calculs fort longs, est peu utile dans la pratique parce qu'il est rare que l'on cherche à conserver la surface totale d'un pays sans s'occuper de conserver aussi les surfaces élémentaires.

30. Mentionnons ici la *Projection of the Globe on the cylinder of a meridian, by* J. *Wetch* (1). C'est une projection perspective centrale sur un cylindre tangent à la sphère le long d'un méridien. Si le cylindre était tangent le long de l'équateur, les méridiens seraient représentés par des droites parallèles équidistantes perpendiculaires à l'équateur, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières et dont la distance à l'équateur serait égale à la tangente de la latitude. Le cylindre étant en réalité tangent le long d'un méridien les degrés du méridien moyen conservent seuls leur véritable longueur, ceux de l'équateur varient comme les différences des tangentes des longitudes ; les méridiens et les parallèles sont des courbes faciles à tracer par points à l'aide des formules de transformation

(1) Bibliothèque impériale, Kl. 1112.

de coordonnées dont nous avons déjà fait usage pour les projections cylindriques transverses de Lambert.

MODIFICATION DE LA PROJECTION CYLINDRIQUE

81. Avant de déterminer ce qui a rapport aux développements cylindriques, nous dirons quelques mots d'une projection *trapéziforme* introduite dans la géographie au commencement du XIVe siècle (1) comme modification de la projection plate parallélogrammatique employée par Ptolémée pour les vingt-six cartes de son Hyphégèse géographique, et qui fut la plus employée pendant les XVe, XVIe et même XVIIe siècles. Elle consiste à remplacer les méridiens parallèles de la projection plate par des méridiens rectilignes, mais convergents d'après la condition de conserver les divisions exactes des parallèles extrêmes de la carte ou de deux parallèles pris à volonté.

Ainsi l'on porte sur le méridien principal *ab* (fig. 60) les degrés égaux *g* de latitude, on élève des perpendiculaires par les points de division, et sur deux des parallèles C*c*C', D*d*D' on porte en véritable grandeur les degrés de longitude de ces parallèles.

On a ainsi

$$c\gamma = \gamma\gamma' = \gamma'\gamma'' = \ldots\ldots = g\cos l_1,$$
$$d\delta = \delta\delta' = \delta'\delta'' = \ldots\ldots = g\cos l_2.$$

On voit de suite que les parallèles CC', DD' devront être très-éloignés pour bien déterminer les méridiens; mais, d'un autre côté, pour répartir aussi également que possible la déformation résultant de ce tracé, il conviendra de prendre ces deux parallèles de manière à partager en trois parties égales la hauteur en latitude de la carte, et alors

$$ac = cd = db.$$

Cherchons le point de convergence P et les angles des méridiens avec le méridien principal et avec les parallèles.

Soit XX' un parallèle de latitude *l*; on aura

$$\frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{c\gamma}{Pc}, \quad \text{ou} \quad \frac{g(\cos l_1 - \cos l_2)}{g(l_2 - l_1)} = \frac{g\cos l_1}{cP},$$

(1) Le manuscrit grec de la géographie de Ptolemée, n° 1401 de la bibliothèque Impériale, qui est réputé du XIVe siècle, offre la plupart de ses cartes ainsi modifiées, tandis que dans le ms. 1402 la projection est restée plate.

d'où

$$cP = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_1(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

De même

$$Pd = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{\cos l_1 - \cos l_2} = \frac{g\cos l_2(l_2 - l_1)}{2\sin\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\frac{l_2 + l_1}{2}}.$$

On déterminera ainsi le point P par l'une de ces deux équations. On a ensuite

$$Px = Pd - dx = Pd - g(l - l_2).$$

Appelons θ l'angle $xP\xi$, on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c\gamma - d\delta}{cd} = \frac{(\cos l_1 - \cos l_2)}{l_2 - l_1},$$

donc

$$x\xi = Px\operatorname{tang}\theta = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2)}{l_2 - l_1},$$

telle est la valeur du degré de longitude à la latitude l. Sur la sphère ce degré de longitude est égal à

$$g' = g\cos l,$$

l'erreur commise sur le degré de longitude à la latitude l est donc

$$x\xi - g' = \frac{g\cos l_2(l - l_1) - g\cos l_1(l - l_2) - g\cos l(l_2 - l_1)}{l_2 - l_1}.$$

Par exemple, si les deux parallèles dont on veut conserver les grandeurs ont pour latitudes, l'un $l_1 = 55°$, l'autre $l_2 = 60°$, l'erreur commise sur le parallèle de 65° sera, en faisant $g = 1$, $\cos l_1 = 0{,}5736$, $\cos l_2 = 0{,}5000$, $\cos l = 0{,}4226$;

$$x\xi - g' = 0{,}0038.$$

De même, en appelant $\varphi = P\gamma c$ l'angle d'un méridien avec un parallèle, si γc contient t degrés de longitude,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dc}{c\gamma - d\delta} = \frac{l_2 - l_1}{t(\cos l_1 - \cos l_2)}.$$

Dans notre exemple, si $t = 10°$, on trouve

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{5}{10\,(0{,}0736)} \quad \text{ou} \quad \varphi = 81°,38';$$

l'erreur en moins est donc de 8° 22'.

Ainsi, dans cette projection, le méridien central est seul perpendiculaire aux parallèles dont deux conservent leurs véritables grandeurs; les parallèles intermédiaires sont diminués, les autres sont augmentés, et les erreurs augmentent rapidement à mesure que l'on s'éloigne de ces deux parallèles; de même l'angle des méridiens et des parallèles, au lieu d'être droit, décroît rapidement à mesure que l'on s'éloigne du méridien central. La simplicité du tracé permettra cependant l'emploi de cette projection pour des bandes peu étendues en latitude, lorsque la conservation rigoureuse des angles et des surfaces sera de peu d'importance.

La projection n° XXXV a été dressée dans ce système et représente l'hémisphère nord développé en conservant les degrés des parallèles de 30° et de 60° de latitude.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ALTÉRATIONS DANS UNE PROJECTION QUELCONQUE.

1. Nous avons donné aux §§ 11-15 du chapitre V les formules qui permettent d'évaluer en un point quelconque d'une projection zénithale les altérations d'angles, de longueurs et de surfaces; nous allons maintenant étudier la même question d'une manière générale et chercher la loi de déformation en un point quelconque, lorsqu'on passe d'une figure tracée sur le sphéroïde à celle qui la représente sur la carte.

Considérons un point quelconque du sphéroïde défini par sa latitude l et sa longitude t, et le plan tangent en ce point; toute courbe infiniment petite tracée autour de ce point peut être considérée comme située tout entière dans ce plan tangent qui se confond avec la surface jusqu'à des distances infiniment petites du point de contact; supposons que cette courbe soit une circonférence dont ce point occupe le centre. Un arc quelconque tracé du centre à la circonférence, c'est-à-dire un rayon quelconque de cette dernière, aura pour longueur

$$ds = \sqrt{r^2dt^2 + \rho^2dl^2},$$

r désignant le rayon du parallèle du point (l, t) et ρ le rayon de courbure du méridien en ce point; r et ρ sont donc des fonctions connues de l.

Soit, sur la carte, x et y les coordonnées rectangulaires du point correspondant au point (l, t) du sphéroïde; l'élément considéré aura pour projection un arc dont la longueur sera exprimée par

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Désignons par m le rapport de la seconde distance à la première, rapport variable d'un point à l'autre de la carte, et variable aussi en

chaque point avec l'orientation de l'élément mesuré ou avec le rapport $\frac{rdt}{\rho dl}$, tangente trigonométrique de l'angle α formé sur le sphéroïde par la direction considérée et le méridien.

Nous aurons donc l'équation

$$r^2dt^2 + \rho^2dl^2 = \frac{1}{m^2}(dx^2 + dy^2), \qquad \text{(I)}$$

dans laquelle

$$dx = \frac{dx}{dt}dt + \frac{dx}{dl}dl = pdt + qdl,$$

$$dy = \frac{dy}{dt}dt + \frac{dy}{dl}dl = p'dt + q'dl.$$

Exprimons m en fonction de l'angle α défini par l'égalité

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{rdt}{\rho dl}.$$

L'équation (I) prend la forme

$$m^2 = \frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha + \frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\cos^2\alpha. \qquad \text{(II)}$$

Sous cette forme elle met d'abord en évidence une propriété importante. Si l'on calcule deux valeurs de m^2 correspondantes à deux valeurs de α différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, leur somme sera indépendante de α; on a en effet pour l'une

$$m^2 = \frac{p^2+p'^2}{r^2}\sin^2\alpha + \frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et pour l'autre

$$m_1^2 = \frac{p^2+p'^2}{r^2}\cos^2\alpha - \frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\sin^2\alpha,$$

et, en ajoutant,

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2+p'^2}{r^2} + \frac{q^2+q'^2}{\rho^2}, \qquad \text{(III)}$$

égalité remarquable dont nous aurons occasion de faire usage un peu plus loin.

Cherchons la valeur de α qui rend le rapport m maximum ou mi-

nimum en un point donné (l, t). Il faut pour cela laisser p, p', q, q', ρ et r constants dans l'équation (II), et égaler à zéro la dérivée du second membre prise par rapport à la seule variable α, ce qui donne

$$\left(\frac{p^2+p'^2}{r^2}-\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}\right)\sin 2\alpha+\frac{2(pq+p'q')}{\rho r}\cos 2\alpha=0,$$

ou bien

$$\operatorname{tang} 2\alpha=-\frac{2(pq+p'q')\rho r}{\rho^2(p^2+p'^2)-r^2(q^2+q'^2)}. \quad \text{(IV)}$$

On a donc pour tang 2α une valeur unique, mais il en résulte pour α, entre 0 et π, deux valeurs distinctes dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

Les éléments de longueurs qui correspondent à ces deux valeurs de α sont, l'un l'élément le plus augmenté sur la carte, l'autre l'élément le plus réduit; on peut s'assurer en effet que les deux valeurs de α font de signes contraires la dérivée seconde du second membre de l'équation (II).

Les éléments de longueurs qui subissent sur la carte les plus grandes altérations font donc un angle droit sur la surface du sphéroïde.

Cherchons aussi l'angle qu'ils font sur la carte. Nous aurons pour l'un d'eux

$$dx'=pdt+qdl=\left(\frac{\rho}{r}p\operatorname{tang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy'=\left(\frac{\rho}{r}p'\operatorname{tang}\alpha+q'\right)dl;$$

pour l'autre, en augmentant α de $\frac{\pi}{2}$,

$$dx''=\left(-\frac{\rho}{r}p\operatorname{cotang}\alpha+q\right)dl,$$

$$dy''=\left(-\frac{\rho}{r}p'\operatorname{cotang}\alpha+q'\right)dl.$$

Faisons ensuite

$$\operatorname{tang}\beta'=\frac{dy'}{dx'} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta''=\frac{dy''}{dx''},$$

et il viendra, en multipliant ces deux équations membre à membre,

$$\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''=\frac{\frac{1}{2}(r^2q'^2-\rho^2p'^2)\sin 2\alpha-\rho r p'q'\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(r^2q^2-\rho^2p^2)\sin 2\alpha-\rho r pq\cos 2\alpha},$$

fraction qui se réduit à -1 en vertu de l'équation (IV). Donc les deux directions correspondantes aux angles β' et β'' font entre elles un angle droit, ou, en d'autres termes, les éléments de longueur les plus altérés ont sur la carte comme sur le sphéroïde des directions rectangulaires; ces directions ne coïncident avec les méridiens et les parallèles que dans les projections où ces deux lignes se coupent à angle droit.

2. Revenons à l'équation (III)

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

Si nous prenons pour unité le rayon de la petite circonférence que nous avons décrite sur le sphéroïde, les longueurs des projections de deux rayons rectangulaires seront précisément m et m_1, et l'égalité précédente exprime que la somme des carrés de ces rayons est constante quelle que soit la valeur de l'angle α. Or si l'on considère une ellipse (fig. 61) et la circonférence décrite sur son grand axe, on sait que les rayons vecteurs de l'ellipse correspondant à deux rayons rectangulaires du cercle sont deux demi-diamètres conjugués, et que la somme de leurs carrés est constante et égale à la somme des carrés des axes. Comme cette propriété suffit réciproquement pour définir l'ellipse, et que cette courbe peut toujours être considérée comme la section oblique d'un cône droit, on voit que, autour d'un même point, la déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces, ni de la position du point que l'on considère, ni de la manière dont on a tracé le canevas; voici comment M. Tissot l'a énoncée (1) :

« Toute représentation du sphéroïde sur un plan peut être remplacée en chaque point par une projection orthogonale faite à une échelle convenable (2). »

3. Nous avons montré précédemment, et il est facile de vérifier à l'aide de cette loi, que, quelle que soit la projection adoptée, il existe en chaque point du sphéroïde deux directions et par conséquent deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, à moins que les angles ne soient tous conservés, il n'en existe que deux, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. M. Tissot leur a donné le nom de *tangentes principales*.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLIX, p. 673.

(2) La même loi s'applique à la représentation d'une surface quelconque sur une autre.

C'est pour ces directions que le rapport des longueurs de deux éléments infiniment petits, qui se correspondent sur les deux surfaces, atteint sa plus grande et sa plus petite valeur. Désignons respectivement ces deux valeurs par a et b et supposons $a > b$; a sera le demi grand axe de l'ellipse projection de la petite circonférence décrite sur le sphéroïde, et b sera le demi petit axe; on aura d'abord

$$a^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{N^2 \cos^2 l},$$

$$b^2 = \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2}{\rho^2},$$

et l'on pourra calculer a et b quand on connaîtra les formules de la projection dont on s'occupe, c'est-à-dire les expressions des coordonnées rectangulaires de chaque point en fonction de l et de t. Les deux rayons de courbures N et ρ de l'ellipsoïde en ce point se calculeront facilement en fonction de la latitude l.

Les tangentes principales sont bissectrices des mêmes angles sur le sphéroïde et sur la carte, et les rapports de longueurs sont égaux sur les côtés de chacun de ces angles.

La représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la tangente principale qui se rapporte au maximum a. Si on représente par φ l'un de ces angles, par ψ l'angle modifié et par m le rapport de longueurs pour son second côté, il viendra

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi; \quad \operatorname{tang}(\varphi - \psi) = \frac{(a-b)\sin 2\varphi}{a + b + (a-b)\cos 2\varphi},$$

$$m\cos\psi = a\cos\varphi; \quad m\sin\psi = b\sin\varphi;$$

$$m^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

Le maximum de l'altération $\varphi - \psi$ est l'angle θ pour lequel on a

$$\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}; \quad \cos\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

En appelant Φ et Ψ les valeurs correspondantes de φ et ψ, et M celle de m, on trouve

$$\Phi = 45° + \frac{\theta}{2}; \quad \Psi = 45° - \frac{\theta}{2}; \quad \operatorname{tang}\Phi = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tang}\Psi = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad M = \sqrt{ab}.$$

L'angle le plus altéré est celui que forme la direction ainsi obtenue avec la droite qui lui est symétrique par rapport à l'une des tangentes principales. Cet angle se trouve remplacé par son supplément dans la représentation, et l'altération est égale à 2θ.

A toute autre direction il en correspond une seconde seulement, faisant avec la première un angle qui n'est pas modifié ; l'une étant donnée par l'angle φ, l'autre le sera par l'angle $90° - \psi$.

Pour tous les angles non modifiés, le produit des rapports de distances m et m' qui conviennent aux deux côtés, est le même, et l'on a

$$mm' = ab.$$

Si l'on représente par m et m_1 les rapports pour deux directions à angle droit, et par δ l'altération de cet angle, on aura, ainsi que nous l'avons déjà vu,

$$m^2 + m_1^2 = a^2 + b^2; \qquad mm_1 \cos\delta = ab.$$

Lorsqu'on passe de la première surface à la seconde, le rapport M^2, suivant lequel l'élément superficiel est modifié, est donné par le rectangle des deux axes. On a

$$M^2 = ab;$$

ce rapport est donc le carré du rapport des longueurs des seconds côtés de l'angle le plus altéré Φ et de sa projection Ψ.

On a

$$a = M \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right); \qquad b = M \operatorname{tang}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right).$$

Si les surfaces sont conservées en projection, il vient

$$M^2 = mm' = mm_1 \cos\delta = 1,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a-b}{2}; \qquad a = \operatorname{tang}\left(45° + \frac{\theta}{2}\right).$$

Dans ce cas, les deux éléments de longueur, dont l'angle est le plus altéré, n'éprouvent pas de modification.

Tous ces résultats, que nous avons donnés sans démonstration parce qu'ils se déduisent immédiatement de la loi de la déformation et de la considération de la circonférence infiniment petite et de l'ellipse projection, sont généraux et se vérifient dans une transformation quelconque.

Lorsque la projection est orthomorphe, l'ellipse devient une circonférence, et le rapport m des longueurs est indépendant de l'orientation de l'élément considéré.

4. Reprenons l'équation (III).

$$m^2 + m_1^2 = \frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}.$$

M. Collignon (1) remarque que, si en un point donné d'une projection *équivalente*, il n'y a pas altération dans les longueurs, m étant égal à m_1 et à l'unité, la fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est égale à deux unités. Réciproquement, si en un point particulier d'une carte conservant les surfaces, cette fonction a pour valeur deux unités, il n'y a pas d'altération dans les longueurs autour de ce point, car les équations

$$mm_1 = 1 \quad \text{et} \quad m^2 + m_1^2 = 2,$$

ne sont satisfaites que par

$$m = m_1 = 1.$$

La fonction $\frac{p^2 + p'^2}{r^2} + \frac{q^2 + q'^2}{\rho^2}$ est donc la fonction caractéristique du mérite propre d'un système quelconque de tracé conservant les surfaces. Si l'on calcule les valeurs numériques de cette fonction en différents points, l'écart de ces nombres par rapport au nombre 2, leur limite inférieure, indique pour chaque point le degré d'altération résultant du tracé.

Appliquant cette méthode à la comparaison de différentes projections équivalentes, M. Collignon trouve que, pour la projection zénithale de Lambert, en prenant le pôle pour centre, cette fonction a pour expression

$$\cos^2\frac{90^\circ - l}{2} + \frac{1}{\cos^2\frac{90^\circ - l}{2}},$$

résultat auquel nous sommes parvenus directement. Elle prend la valeur 2 au pôle, centre du tracé, et atteint son maximum $2 + \frac{1}{2}$ à l'équateur.

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 41e cahier.

Pour la projection sur le cylindre circonscrit à l'équateur, la fonction est représentée par l'expression

$$\sin^2 l + \frac{1}{\sin^2 l};$$

elle est égale à 2 en tous points de l'équateur, mais elle devient infinie au pôle pour $l = 90°$.

Pour le tracé homalographique de Mollweide, on trouve

$$\frac{p^2+p'^2}{r^2}+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}=\frac{8\cos^2\varphi}{\pi^2\cos^2 l}+\frac{\pi^2}{8}\frac{\cos^2 l}{\cos^2\varphi}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2 l}{2\cos^4\varphi}t^2.$$

Cette fonction atteint ses moindres valeurs pour une valeur donnée de l lorsque $t = 0$, c'est-à-dire le long du méridien central; sur ce méridien elle atteint son minimum en deux points, lorsque $\varphi = l$, ce qui a lieu à l'équateur et au pôle. Elle prend alors la valeur 2,048 supérieure à deux unités; mais cette valeur n'est pas applicable au pôle, car, en ce point, t est indéterminé, et le dernier terme de la fonction a une valeur infinie. Pour $t = 0$ et $l = 65° 30'$, latitude qui correspond à peu près à la plus grande différence entre l et φ, la valeur de la fonction atteint 2,82. Pour un point placé à cette latitude, mais sur le bord de la carte, la valeur de la fonction s'élève à 4,11.

Ces résultats mettent en évidence les profondes altérations inhérentes au tracé homalographique.

La meilleure carte d'égale superficie serait celle pour laquelle la fonction $\frac{p^2+p'^2}{r^2}+\frac{q^2+q'^2}{\rho^2}$ serait égale à deux unités, soit en un point donné, soit en tous points d'une ligne définie par une relation donnée entre l et t et serait en outre la plus petite possible pour tous les autres points de la carte. La détermination des fonctions arbitraires par cette condition constitue un problème d'analyse beaucoup trop compliqué pour que nous essayions de le résoudre.

CHOIX DE LA PROJECTION.

5. Nous n'avons pas la prétention de donner ici des règles fixes sur le choix de la projection qui convient le mieux à la carte que l'on se propose de tracer, et nous disons même que de telles règles ne sauraient exister, car ce choix doit dépendre de plusieurs circonstances qu'il est impossible de prévoir d'une manière générale.

Malte-Brun disait avec raison que le premier objet des méditations du géographe-dessinateur est de déterminer le genre et le but de sa carte; nous ne saurions, de notre côté, trop insister sur l'importance de pareilles considérations, et c'est dans ce but que nous allons passer rapidement en revue les principaux cas qui peuvent se présenter.

Lorsqu'on veut construire une carte terrestre, on doit se demander tout d'abord si elle doit représenter : 1° la surface entière du globe ou seulement un hémisphère; 2° une vaste portion du monde; 3° un empire ou une province seulement.

Pour chacune de ces grandes divisions, le but que doit atteindre le tracé permettra de restreindre beaucoup le nombre des projections qui peuvent tout d'abord paraître convenables. Si l'on veut conserver les surfaces, c'est dans la classe des projections équivalentes que l'on devra borner son choix; si, au contraire, il importe de conserver la similitude des configurations, la projection devra être orthomorphe; mais le plus souvent il sera nécessaire d'accepter en même temps les erreurs de surfaces et de configurations, afin de ne pas exagérer l'une des deux en détruisant l'autre entièrement; et c'est alors que le choix à faire exigera une étude approfondie et intelligente.

6. Nous allons passer rapidement en revue les différents systèmes qui peuvent convenir à la représentation de la surface entière du globe au moyen d'une ou de deux cartes seulement; toute projection pourrait, à la rigueur, être appliquée à la représentation d'un hémisphère, ainsi que nous l'avons fait dans les planches qui accompagnent cet ouvrage ; mais quelques-unes entraînent avec elles, à cette limite, des erreurs beaucoup trop grandes pour que l'emploi, quelle que soit d'ailleurs la simplicité du tracé, puisse en être avantageux ; nous n'avons pas eu d'autre but, en projetant un hémisphère entier, que de mieux faire ressortir les inconvénients de chaque canevas et d'indiquer ainsi dans quelles limites chacun d'eux peut être employé.

1° Le développement des cartes réduites de Mercator et celui du cylindre droit de Lambert sont les seuls qui représentent les méridiens et les parallèles par des droites perpendiculaires entre elles; le premier conserve les angles, le second les surfaces, mais tous les deux ont l'inconvénient de déformer d'une manière exagérée les régions polaires, et ne peuvent donner une idée même approchée des

positions relatives des différents points du globe; cependant le premier est souvent employé pour les planisphères, parce qu'il indique immédiatement la route à suivre pour se rendre par mer d'un point à un autre du globe, ainsi que la longueur de cette route.

2° La projection homalographique, qui conserve les surfaces et permet de représenter le globe entier dans une ellipse dont l'axe équatorial est double de l'autre, modifie trop les angles pour être employée exclusivement; au delà de 50° de latitude, les altérations croissent très-rapidement, et rendent ce système impropre à représenter d'une manière satisfaisante les configurations des régions plus élevées en latitude.

3° Les proportions zénithales, que nous avons étudiées séparément avec tous les détails nécessaires, possèdent ce grand avantage que les azimuts relatifs au point central sont conservés; que les erreurs, de quelque nature qu'elles soient, y sont égales à égale distance du centre, nulles à ce centre qui peut être pris arbitrairement, et par conséquent d'autant plus faibles que les régions considérées sont plus voisines de ce point; ces erreurs sont, en outre, très-faciles à calculer.

Parmi ces projections, la plus facile à tracer est la projection stéréographique, qui n'altère pas les angles et permet de résoudre très-rapidement par des constructions planes les problèmes de la sphère; quoique ce système double les longueurs et quadruple les surfaces le long de la circonférence qui limite un hémisphère, il est bon qu'il figure dans les atlas, mais il ne devrait pas y figurer seul; la projection zénithale équivalente de Lambert et la projection équidistante, employées simultanément avec la projection stéréographique, permettraient de se rendre un compte exact des surfaces et des distances, non-seulement au point central, mais encore des différents points entre eux, lorsque ces points ne sont pas à plus de 30 à 40 degrés du centre. Sur la circonférence de l'hémisphère projeté dans le système équidistant, les surfaces élémentaires de la carte et de la sphère sont entre elles dans le rapport de 1,57 à 1, au lieu de 4 à 1, comme dans la projection stéréographique. Nous donnons aux chapitres IX et XIV (2e partie) le moyen de construire rapidement ces deux projections, soit directement, soit à l'aide d'une projection stéréographique déjà tracée et ayant pour centre le même point du globe.

Lorsque l'on veut représenter un hémisphère sous l'aspect méridien, il est souvent suffisant de remplacer le système équidistant par

le système globulaire, plus facile à tracer, et qui ne présente avec lui que des différences très-faibles, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

La projection équidistante est celle qui convient le mieux au tracé d'un hémisphère sous l'aspect polaire, parce que les parallèles y sont représentés par des circonférences concentriques et équidistantes, comme sur la sphère, et que dans toute la zone limitée par le cercle polaire les erreurs de tous genres y sont tellement faibles qu'elles peuvent y être négligées; car, à 25 degrés du pôle, c'est-à-dire sur le parallèle de 65 degrés de latitude, le rapport maximum des distances élémentaires de la carte et de la sphère, de même que le rapport des surfaces élémentaires, est exprimé par 1,032, valeur très-peu différente de l'unité.

La projection orthographique altère beaucoup trop les surfaces et les angles pour qu'on puisse l'employer avantageusement pour la représentation d'un hémisphère ; à 60 degrés du centre, les surfaces ne sont que la moitié de celles qui leur correspondent sur la sphère, et la plus grande altération d'angle est déjà de 19° 28'. Cette projection est adoptée pour la carte de la lune, parce qu'elle figure les astres comme nous les voyons en réalité.

Les autres projections perspectives ne sont que rarement employées pour la construction des mappemondes; celle de la Hire et de Parent ne s'écartent que très-peu de la projection équidistante, qui n'est pas plus difficile à construire ; la projection du colonel James, où les erreurs sont à peu près uniformément réparties, peut être avantageusement employée pour les cartes physiques figurant plus d'un hémisphère, de manière à embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble des grands continents.

La projection de sir Airy, *Balance of Errors*, n'a pas encore été employée ; sa formule, très-compliquée, nécessite des calculs très-pénibles, et les problèmes de la sphère ne peuvent s'y résoudre facilement.

4° Les projections coniques seront très-utiles pour figurer un hémisphère entier, boréal ou austral parce que, les parallèles étant représentés par des cercles concentriques, les régions situées sous les mêmes latitudes sont comparables entre elles. Les projections coniques orthomorphes de Lambert conservant les angles (excepté aux pôles) et par conséquent les formes des parties peu étendues, conviennent très-bien pour cet objet : elles pourraient même être pro-

longées au delà de l'équateur ; mais, comme les erreurs croissent très-rapidement à cette limite, il sera préférable, si l'on veut représenter la surface entière du globe, de recourir à deux cartes se terminant à l'équateur, l'une pour l'hémisphère boréal, l'autre pour l'hémisphère austral. En prenant pour λ la valeur $\frac{3}{4}$, l'angle au pôle d'un hémisphère entier est de 281° 59″ 38′ ; les degrés de longitude sont conservés sur deux parallèles qui diffèrent peu de ceux de 30 et de 70 degrés de latitude ; le rapport d'agrandissement, le même à ces deux latitudes, est le plus petit possible sous le parallèle de 51° 30′ environ ; enfin, le parallèle de 45° de latitude partage tous les méridiens en deux parties à peu près égales.

On peut aussi représenter l'hémisphère boréal ou l'hémisphère austral en proportion conique équivalente, d'après le système de Lambert, en déterminant le coefficient arbitraire n de manière que les degrés d'un parallèle donné conservent leur véritable rapport avec le degré de longitude ; si ce parallèle est celui de 45 degrés, le coefficient n prend la valeur 1,171, et par conséquent l'angle au pôle est de 307° 25′ environ.

Enfin les projections polyconiques représenteront avec une exactitude suffisante un hémisphère sous l'aspect méridien, soit que l'on veuille conserver les degrés de tous les parallèles, soit que l'on préfère sacrifier cette égalité à la perpendicularité des méridiens et des parallèles. Comme les deux systèmes diffèrent très-peu l'un de l autre, on pourra se contenter de la construction abrégée d'un hémisphère que nous avons indiquée en parlant des systèmes polyconiques.

7. Supposons maintenant que l'on veuille représenter, non plus un hémisphère entier, mais une portion plus ou moins grande du monde. On devra tout d'abord considérer quelle est la position de cette contrée relativement à l'équateur, son étendue et la forme générale de son contour ; on voit que la question sera beaucoup plus difficile que celle de la construction d'un hémisphère, parce que, l'échelle étant nécessairement plus grande, les altérations résultant du canevas que l'on adoptera seront beaucoup plus apparentes, et auront une importance bien autrement considérable ; on devra donc étudier la question avec le plus grand soin, chercher à répartir les erreurs à peu près également dans les parties également importantes, en reportant les plus considérables dans les parties dont l'exacte représentation importe le moins, comme, par exemple, les grandes masses d'eau qui entourent un continent ; il faudra aussi éviter les

projections qui, par rapport au format, obligent le géographe à faire entrer dans sa carte plus de pays étrangers à son objet que tel autre système, parce qu'elles diminuent l'échelle de la carte, c'est-à-dire la proportion entre l'image et l'objet représenté.

Lorsque la carte ne doit embrasser qu'une petite portion de la surface du globe, les défauts de toutes les méthodes diminuent, car les quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles approchent d'autant plus d'être des parallélogrammes rectangles équivalents qu'ils sont moins éloignés du centre de la contrée que l'on veut représenter ; c'est ainsi que toutes les projections viennent se confondre avec le plan levé géométriquement toutes les fois qu'il s'agit d'une étendue dans laquelle la courbure de la terre est peu sensible; il est donc toujours avantageux de multiplier les cartes d'un atlas, au lieu de chercher à représenter dans une même carte plusieurs États, plusieurs contrées dont l'ensemble importe peu à l'étude que l'on veut faire; mais, en se conformant à cette prescription, le choix de la projection n'en reste pas moins important, car il peut être nécessaire de réduire les erreurs le plus possible autour d'un point important, tel qu'une capitale, en les laissant s'accroître avec les distances à ce point, ou de conserver les distances relatives dans certaines directions plutôt que dans d'autres.

Il ne peut exister de règles fixes pour le choix de la projection la plus convenable; s'il était possible de dresser un tableau des altérations d'angles, de longueurs, de surfaces, en des points assez rapprochés de chaque canevas, un tracé rapide du contour de la contrée que l'on veut figurer montrerait, suivant le but que l'on veut atteindre, quel est le système qui convient le mieux à cette contrée ; mais on ne peut songer à dresser un pareil tableau, puisque, pour beaucoup de systèmes, les altérations dépendent de coefficients arbitraires et que l'on ne détermine que par les données mêmes de la question que l'on veut résoudre, par exemple, par la latitude du point important où l'on veut réduire les erreurs, ou par celle de deux parallèles dont on veut conserver les degrés de longitude, etc. L'intelligence du géographe peut donc seule suppléer à ce manque de règles et d'indications suffisantes, et ce n'est que par une connaissance approfondie des avantages et des défauts de chaque système en particulier qu'il pourra prononcer au milieu du grand nombre qui peuvent s'offrir à lui.

NOTE

SUR LES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

Par M. A. Tissot (1).

« *Trouver le meilleur mode de projection pour chaque contrée particulière.* »

8. « Lorsqu'il s'agit d'une carte destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la première condition que l'on doit s'astreindre à remplir en faisant choix d'un système de projection, est relative à la reproduction des angles; il n'est pas nécessaire d'annuler complétement leurs altérations, mais il faut les rendre plus faibles que les erreurs admissibles en topographie dans la mesure des angles eux-mêmes; alors chaque feuille de la carte constituera un véritable levé topographique; seulement, les distances ne pouvant être conservées, l'échelle du dessin variera d'une feuille à l'autre. Une seconde condition se rapporte à cette variation de l'échelle; on doit, en la rendant aussi faible que possible, amener à son maximum l'étendue de chacune des régions à laquelle il est permis d'attribuer une échelle unique. Enfin, avant de tracer le canevas, on a à calculer les coordonnées d'un grand nombre de points rapportés à deux axes rectangulaires; une troisième condition réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

« Il existe une infinité de systèmes de représentation qui ne modifient pas les angles; mais s'il s'agit d'une contrée ayant, comme la Russie, des dimensions exceptionnelles dans tous les sens, quand même on prendrait celui de ces systèmes qui réduit à son minimum la plus grande altération de longueur, l'échelle subirait de fortes variations d'une extrémité du pays à l'autre, à moins qu'on ne le divisât en plusieurs régions ayant chacune leur carte particulière; c'est pourquoi, tout en évitant les difficultés d'analyse, on aura résolu la question dans les cas qu'il est utile de considérer, si l'on se borne aux trois suivants : celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des parallèles, et autant que l'on voudra dans le sens des mé-

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1860, p. 964-969.

ridiens; celui d'une portion du globe peu étendue dans le sens des méridiens, et autant que l'on voudra dans le sens des parallèles; celui d'une contrée peu étendue dans les deux sens, comme la France, l'Espagne, etc.

« Appelons L la latitude d'un point quelconque, L_0 celle d'un point central, m la longitude du premier point comptée à partir du méridien du second, r le rayon du parallèle dont la latitude est L, r_0 celui du parallèle dont la latitude est L_0, s l'arc de méridien compris entre ces deux parallèles, x et y les coordonnées rectangulaires du point de la carte qui correspond à la latitude L et à la longitude m.

« Dans le premier cas, le meilleur système de projection est donné par les formules

$$\text{(I)} \qquad x = s + \frac{1}{2} rm^2 \sin L, \qquad y = rm\left(1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2L\right).$$

« Dans le second cas, en posant

$$R_0 = r_0 \operatorname{cos\acute{e}c} L_0, \qquad R = R_0 - s - \frac{1}{6} s^3, \qquad \varphi = m \sin L_0,$$

on aura, pour les formules analogues,

$$\text{(II)} \qquad x = R_0 - R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi;$$

ici les méridiens de la carte sont des droites partant toutes d'un même point, et les parallèles des circonférences dont ce point occupe le centre.

« Dans le troisième cas, si l'on appelle N_0 la grande normale du méridien à la latitude L_0, et si l'on représente par μ la variable $m \cos L_0$, on devra employer les formules

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x = s + \frac{1}{2} N_0 \operatorname{tang} L_0\, \mu^2 + \frac{1}{3} As^3 - Bs^2\mu + Cs\mu^2 + \frac{1}{3} B\mu^3, \\ y = rm + \frac{1}{3} Bs^3 + As^2\mu - Bs\mu^2 + \frac{1}{2} C\mu^3, \end{cases}$$

dans lesquelles on peut mettre $L - L_0$ à la place de s, excepté dans le premier terme de la valeur de x; A, B, C sont des coefficients constants, dont le troisième est lié au premier par la relation

$$2(A + C)\cos^2 L_0 = \cos 2L_0;$$

quant à A et à B, ils dépendent de la forme du contour qui limite le pays, et voici comment ils s'obtiennent; on trace d'abord ce contour en rapportant chacun de ses points à deux axes rectangulaires sur

lesquels on porte les coordonnées $L - L_0$ et μ; à l'aide de quelques tâtonnements graphiques, on détermine ensuite de grandeur et de position l'ellipse enveloppante pour laquelle le diamètre qui est incliné à 45° sur ses deux axes est le plus petit possible. Soient $2d$ la longueur de ce diamètre minimum, $2a$ celle du grand axe correspondant, α l'angle que fait cette dernière ligne avec l'axe des coordonnées sur lequel est comptée la variable μ; on aura

$$\text{(IV)} \qquad A = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha - \frac{d^2}{2a^2}\cos 2\alpha\right), \qquad B = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha;$$

le centre de l'ellipse donnera le point central de la carte, et par conséquent fera connaître la latitude moyenne L_0, dont une valeur approchée aura suffi dans cette recherche préliminaire.

« Pour certains contours exceptionnels, le mode de projection le plus avantageux sera fourni par des essais analogues au précédent, mais où les ellipses seront remplacées par des hyperboles ou même par des paraboles, et, dans le cas des paraboles, les formules (III) devront être un peu modifiées; la plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de ces deux derniers essais.

« Enfin, on peut introduire dans les seconds membres des équations (I), (II) et (III) un facteur qu'il est facile de déterminer pour chaque pays en particulier, et dont l'effet est de réduire de moitié la plus grande altération de longueur, en la rendant positive dans certaines régions et négative dans d'autres.

« Appliquées à la France, les recherches qui précèdent donnent

$$\text{(V)} \qquad A = 0{,}306, \qquad B = 0, \qquad C = -0{,}368, \qquad L_0 = 44°40',$$

et le méridien moyen est celui de Paris.

« Pour la carte d'Espagne, dont les opérations géodésiques sont en voie d'exécution, on est conduit à prendre comme méridien central celui de Madrid, et comme parallèle central celui de 40°; les formules sont

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} x = s + 0{,}42013\mu^2 + 0{,}111s^3 - 0{,}185s^2\mu, \\ y = rm + 0{,}333s^2\mu - 0{,}062\mu^3. \end{cases}$$

« Voici maintenant un tableau contenant, pour six contrées différentes, la plus grand altération d'angle et la plus grande altération de distance produites par le mode de projection adopté lors de la

construction de la carte de France, et par l'un de ceux qui sont proposés dans ce Mémoire.

CONTRÉES.	VALEURS de la plus grande altération		MODE DE PROJECTION.
	d'angle.	de distance.	
Première contrée. . .	7° 30′	$\frac{1}{15}$	Celui du Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Celui des formules (I).
Égypte.	25″	$\frac{1}{250}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	5″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
Troisième contrée. . .	14° 40′	$\frac{1}{7}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	1′ 20″	$\frac{1}{230}$	Formules (II).
Algérie.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre.
Idem.	3″	$\frac{1}{2000}$	Formules (II).
France.	18′	$\frac{1}{380}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 45°).
Idem.	10′ 30″	$\frac{1}{650}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 46° 30′).
Idem, ...	25″	$\frac{1}{1100}$	Formules (III) et (V).
Espagne.	11′	$\frac{1}{600}$	Dépôt de la Guerre (parallèle moyen de 41°).
Idem.	20″	$\frac{1}{1000}$	Formules (VI).

« Le premier et le troisième exemple ne se rapportent à aucune division territoriale ; je les ai choisis afin de montrer qu'avec un petit nombre de cartes on pourrait représenter toute la surface du globe, en ne donnant lieu qu'à de faibles déformations ; en effet, si de part et d'autre d'un méridien quelconque on porte sur tous les parallèles des longueurs égales à la moitié de l'arc de 15° à l'équateur, on détachera de la surface de la terre une portion qui en sera environ la huitième partie, et c'est de cette portion qu'il s'agit dans les deux premières lignes du tableau. Dans la cinquième et la sixième, on a considéré toute la zone comprise entre les parallèles

de 37° 30′ et 52° 30′ de latitude, zone dont fait partie l'Europe centrale, si on la prend dans l'hémisphère nord.

« Pour la seconde application, j'ai choisi la carte d'Égypte, parce que les travaux nécessaires à sa construction doivent être commencés prochainement. Le territoire de l'Égypte se compose, comme on sait, d'une longue vallée encaissée depuis Assouan jusqu'au Caire par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts; il est à présumer que l'on n'effectuera dans ces déserts aucune triangulation, mais que par la suite on continuera au sud d'Assouan et en remontant le Nil des opérations géodésiques dont les résultats offriront beaucoup d'intérêt, tant pour l'étude de la forme de la terre qu'au point de vue géographique. J'ai donc supposé que la carte qu'il s'agissait d'établir était celle d'une contrée située entre le 9e et le 32e degré de latitude, avec une étendue de 5° en longitude.

« Le quatrième exemple est relatif à toute l'Algérie, c'est-à-dire au Tell et au Sahara algériens; en adoptant les formules proposées, on pourrait placer sur la même carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc sans augmenter les altérations.

« Le parallèle moyen de 45° dont il est question pour la France est celui qui a été adopté par les commissions de 1803 et de 1818.

« Enfin, avec les formules (VI), les îles Baléares, le territoire de Ceuta et le Portugal se trouvent compris dans la région à laquelle se rapportent les altérations indiquées par le tableau; mais celles que produit le système de Flamsteed modifié augmenteraient, si on voulait compléter la carte de la Péninsule par l'addition du Portugal. »

DEUXIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION ET USAGE DES PRINCIPALES PROJECTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

1. La projection stéréographique est une projection perspective dans laquelle l'œil est supposé à la surface de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut représenter, à l'extrémité du diamètre passant par le point choisi pour centre de la carte.

Nous avons montré que la position du plan de projection ne pouvait apporter de changement que dans l'échelle de la construction; nous supposerons dans ce qui va suivre que ce plan passe par le centre de la sphère.

Nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre; il est toujours suffisant, en effet, dans le tracé des mappemondes, de supposer la terre sphérique; la considération de l'aplatissement compliquerait beaucoup les calculs et les constructions, et les différences seraient inappréciables aux échelles que l'on adopte ordinairement. Dans les cartes particulières, pour lesquelles, du reste, la projection stéréographique n'est que rarement employée, il sera toujours plus commode et suffisamment exact d'appliquer la méthode de Prony (1), qui remplace la portion de sphéroïde à représenter par une portion de sphère dont il est facile de calculer le rayon, et qui ne change par conséquent rien aux règles établies dans l'hypothèse de la sphéricité. Si nous supposons le périmètre du pays à représenter à peu près circulaire, il suffira presque toujours de prendre pour rayon de la sphère au point central de la carte

$$R = a\left(1 - \frac{1}{2}e^2 + e^2 \sin^2\lambda\right),$$

en appelant λ la latitude de ce point central.

2. Nous avons déjà montré, en étudiant les projections orthomorphes, que la projection stéréographique jouissait de la propriété

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 4.

de conserver les angles tracés sur la surface de la sphère; nous allons donner une nouvelle démonstration géométrique et directe de ce théorème que :

« Les angles tracés sur la surface de la sphère conservent leur grandeur en projection. »

Soit (fig. 62) V le point de vue, EGF le plan de projection perpendiculaire au rayon OV, A le sommet de l'angle considéré qui est formé par deux courbes quelconques tracées sur la surface de la sphère. Cet angle étant mesuré par celui des tangentes aux deux courbes au point A, cherchons comment se projettent ces deux droites AD, AD'.

Le point A se projette en *a*. Le plan DAD' perpendiculaire au rayon OA est tangent à la sphère en A et contient la tangente AT au grand cercle passant par A et V et perpendiculaire lui-même au plan de projection; DD' intersection du plan tangent et du plan de projection, tous deux perpendiculaires au grand cercle passant par A et V, est donc perpendiculaire à ce cercle et par suite aux droites AT et *a*T. En outre *a*T = AT, car le triangle *a*AT est isocèle, puisque les angles en *a* et A ont même mesure; les deux triangles *a*TD, ATD, tous deux rectangles en T, sont donc égaux; il en est de même des triangles ATD', *a*TD'; de là résulte l'égalité des angles DAD', D*a*D' formé par les deux courbes considérées sur la sphère et par leurs projections.

Il résulte de ce théorème général que, dans la projection stéréographique, la projection d'un cercle tracé sur la surface de la sphère est elle-même un cercle.

Pour le démontrer, considérons le cône tangent à la sphère le long de ce cercle (fig. 63). Chaque génératrice de ce cône est perpendiculaire à la tangente correspondante au cercle de base. Or ces génératrices ont pour projections des droites passant toutes par le point *s*, projection du sommet S du cône; les tangentes au cercle de la sphère se projettent évidemment suivant les tangentes à la courbe de projection. D'après la propriété générale, AT étant perpendiculaire à AS, *at* devra être perpendiculaire à *sa*; *sa* sera donc une normale à la courbe; toutes ces normales passant par un même point *s*, il en résulte que la courbe projection est une circonférence. Ainsi la projection d'une circonférence est une autre circonférence.

3. Le rapport entre les longueurs élementaires correspondantes de la projection et de la sphère reste le même autour de chaque point

et ne varie qu'avec la distance de ce point au centre de la projection; il est exprimé par la formule

$$m = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

dans laquelle θ désigne l'arc de grand cercle qui réunit le point considéré au centre de la carte (1). En appelant λ la latitude de ce centre, on pourra toujours exprimer θ en fonction de la latitute l et de la longitude t du point considéré, à l'aide de la formule

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda,$$

dans laquelle l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\tang\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda,$$

et les longitudes t sont supposées comptées à partir du méridien du point central.

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que si le plan de projection, au lieu de passer par le centre de la sphère, est à une distance du point de vue égale à D', ce rapport m, de même que toutes les lignes de la projection, devra être multiplié par le rapport $\frac{D'}{a}$.

Le rapport M^2 des surfaces élémentaires de la projection et de la sphère a pour expression

$$M^2 = \frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}},$$

ou, plus généralement,

$$M^2 = \frac{D'^2}{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}};$$

ce rapport est égal à $\frac{D'^2}{4a^2}$ au centre de la projection, croît avec θ, est égal à $\frac{D'^2}{a^2}$ à 90° du centre, et continue à croître jusqu'à ce que $\theta = 180°$.

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, § 12.

4. Les méridiens et les parallèles de la projection devant toujours être des arcs de cercle, pourront toujours se tracer à l'aide du compas lorsqu'on connaîtra leur centre et leur rayon ; nous allons nous occuper de déterminer ces deux éléments. Disons d'abord que les coordonnées x et y de la projection, sur l'horizon d'un lieu dont la latitude est λ, d'un point de la sphère défini par sa latitude et sa longitude, pourront toujours être calculées à l'aide des formules générales des projections perspectives que nous avons établies et dans lesquelles il suffit de faire $D = a$

$$x = \frac{a(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{1 + \cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{1 + \cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l}.$$

On pourra donc toujours construire les méridiens et les parallèles par abscisses et ordonnées, et réunir les points ainsi déterminés à l'aide du pistolet à arcs de cercles.

Nous allons d'abord étudier les deux cas particuliers de la projection stéréographique polaire ou équatoriale (l'œil à l'un des pôles) et de la projection méridienne (l'œil à l'équateur).

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE POLAIRE OU ÉQUATORIALE.

5. Le plan de l'équateur étant pris pour plan de projection, nous devons faire dans les formules générales de la projection stéréographique $\lambda = 90°$; nous obtenons alors

$$x = \frac{a\cos l\cos t}{1 + \sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{1 + \sin l}.$$

Donc, en appelant z le complément de la latitude,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2\sin^2 z}{(1 + \cos z)^2} = a^2\operatorname{tang}^2\frac{z}{2}.$$

Ces formules montrent que les parallèles sont représentés par des

circonférences ayant toutes pour centre le pôle opposé à l'œil et pour rayon

$$\rho = a \tang \frac{z}{2},$$

c'est-à-dire la tangente de la moitié du complément de la latitude; les méridiens équidistants de la sphère sont représentés par des rayons équidistants de l'équateur, qui a pour rayon le rayon même de la sphère.

Ce premier cas particulier ne présente donc aucune difficulté. On décrira (fig. 64), avec un rayon égal au rayon de la sphère réduit à l'échelle de la carte que l'on veut construire, une circonférence que l'on divisera en degrés et fractions à partir du diamètre (0°,180°), qui doit représenter le méridien principal ou premier méridien; en joignant les points de division au centre, on aura les méridiens de la projection. Pour construire le rayon de chaque parallèle, on joindra le point de la circonférence de la carte qui exprime sa latitude au point (90°) situé dans le demi-cercle opposé : la distance Pn sera le rayon cherché, égal du reste à $a \tang \frac{90° - l}{2}$.

On peut avoir à tracer sur la carte un grand cercle tel que l'horizon d'un lieu défini par sa latitude l et sa longitude t, ou l'écliptique. Nous traiterons ce problème d'une manière générale au paragraphe 10 (4°), sous le titre : Construire la projection de l'horizon d'un lieu donné sur la carte. Résumons ici la solution.

On joindra le point donné A au pôle qui est ici le centre; on élèvera sur cette droite le diamètre $\alpha\alpha'$ perpendiculaire; on joindra le point α' au point A, et à partir du point A' de cette droite on portera sur la circonférence de la carte un arc de 90° de A' en A'_1; le point a, intersection des diamètres qui passent par A et par A'_1, sera un point de l'arc cherché qui devra passer aussi par les deux points $\alpha\alpha'$; il sera donc facile d'en déterminer le centre.

Dans le cas où le centre de ce cercle sortirait des limites de la feuille, on tracerait la circonférence $\alpha a \alpha'$, soit avec une équerre dont les branches mobiles s'appuieraient en α et α' et feraient entre elles l'angle $\alpha a \alpha'$, soit par points en menant des droites telles que αd, $\alpha' d$ faisant entre elles l'angle $\alpha a \alpha'$. Remarquons que cet angle constant est égal au supplément de la latitude du lieu A dont on veut tracer l'horizon, ou bien à 90° + H, H étant l'inclinaison de ce grand cercle sur l'équateur. Le centre est à une distance du centre de la carte

égale à la cotangente de la latitude du lieu A, et le rayon est égal à la cosécante de cette latitude.

Dans la projection stéréographique polaire, la projection d'une courbe loxodromique, c'est-à-dire d'une courbe faisant, en chacun de ses points, un angle constant avec le méridien de ce point, doit être une spirale logarithmique. Cette courbe est en effet la seule qui jouisse de la propriété de couper ses rayons vecteurs sous un angle constant.

La mappemonde n° **1** a été tracée en projection équatoriale.

Le tableau suivant, dressé à l'aide de la formule

$$\rho = a \tang \frac{90° - l}{2},$$

donne les valeurs des rayons des parallèles de 5° en 5° de latitude en supposant $a = 1$, c'est-à-dire en prenant pour unité le rayon de la sphère.

l	ρ	l	ρ
0°	1,00000	45	0,41421
5	0,91633	50	0,36397
10	0,83910	55	0,31530
15	0,76733	60	0,26795
20	0,70021	65	0,22169
23° 27′ 30″	0,65616	66° 32′ 30″	0,20762
25	0,63707	70	0,17633
30	0,57735	75	0,13165
35	0,52057	80	0,08749
40	0,46631	85	0,04366

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE MÉRIDIENNE.

6. La projection est supposée faite sur le plan du méridien perpendiculaire au méridien principal et comptant par conséquent 90° de longitude. Le méridien principal et l'équateur sont représentés par deux droites perpendiculaires qui sont deux axes de symétrie de la figure; la première est prise pour axe des x, la seconde pour axe des y.

En faisant, dans les formules générales, $\lambda = 0$, on obtient

$$x = \frac{a \sin l}{1 + \cos l \cos t}, \quad y = \frac{a \cos l \sin t}{1 + \cos l \cos t} = x \sin t \operatorname{cotang} l.$$

En éliminant l entre ces équations, on obtient

$$(x^2 + y^2) \sin t + 2ay \cos t - a^2 \sin t = 0,$$

équation d'un cercle passant par les pôles et dont le rayon est

$$\rho_m = \frac{a}{\sin t} = a \operatorname{coséc} t.$$

Les coordonnées α et β du centre sont

$$\alpha = 0; \quad \beta_m = -a \operatorname{cotang} t;$$

le centre est donc sur l'équateur à une distance du centre de la carte égale à la cotangente de la longitude. Enfin, en cherchant la distance du centre de la carte au point d'intersection du méridien considéré et de l'équateur, on trouve

$$\delta_m = a \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

On peut arriver très-simplement à ces formules en se rappelant que, d'après la propriété générale de la projection stéréographique, l'angle des tangentes au premier méridien et au méridien considéré, angle qui mesure la longitude, doit être le même en projection que sur la sphère. Il suffira donc, pour avoir le centre d'un méridien donné par sa longitude t, de faire au pôle P (fig. 65), avec la ligne des pôles PP' un angle égal au complément $90° - t$ de la longitude.

Pour déterminer les centres de tous les méridiens également espacés, de 5° en 5° par exemple, on décrira du pôle P avec un rayon quelconque une circonférence que l'on partagera en arcs égaux de 5° à partir du diamètre perpendiculaire à PP'; la rencontre des divers rayons prolongés avec EE' déterminerait le centre de chaque méridien.

Le triangle rectangle PCO donne immédiatement les formules que nous avons trouvés analytiquement

$$\mathrm{CO} = \beta = \operatorname{cotang} t; \quad \mathrm{PC} = \rho_m = a \operatorname{coséc} t; \quad \delta = \mathrm{OM} = a \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

7. Occupons-nous maintenant des parallèles. Leur équation est

$$(x^2+y^2)\sin l + 2ax + a^2 \sin l = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon est

$$\rho_p = a \operatorname{cotang} l.$$

Les coordonnées du centre sont

$$\alpha_p = a \operatorname{coséc} l; \quad \beta_p = 0;$$

le centre est donc sur la ligne des pôles à une distance du centre de la carte égale à la cosécante de la latitude; enfin en cherchant la distance du centre de la carte au point d'intersection le plus proche du parallèle considéré et du premier méridien, on trouve

$$\delta_p = a \operatorname{tang} \frac{l}{2}.$$

On peut arriver très-simplement à ces formules en remarquant que chaque parallèle doit couper le méridien de projection perpendiculairement au point qui marque sa latitude, de telle sorte que le centre doit se trouver sur la tangente CN' au point N' (fig. 66), dont la latitude est l. Le triangle rectangle CN'O donne immédiatement

$$CN' = \rho_p = a \operatorname{cotang} l; \quad OC = \alpha_p = a \operatorname{coséc} l; \quad On = \alpha = a \operatorname{tang} \frac{l}{2}.$$

Rappelons ici que le point n s'obtient immédiatement en joignant E' et N, c'est-à-dire une des extrémités de l'équateur au point du demi-cercle opposé qui exprime la latitude du parallèle sur le méridien de projection préalablement divisé en degrés et fractions à partir du diamètre EE'. On déterminera donc le centre soit par la tangente, soit en élevant des perpendiculaires sur le milieu de nN et nN'.

Au lieu de construire les méridiens et les parallèles, il y a plus d'avantage, soit comme rapidité, soit comme exactitude, à se servir d'une table où l'on aura calculé d'avance le rayon ρ de chaque cercle, la distance de son centre au centre de la carte et, si l'on veut, la distance du centre de la carte au point le plus proche. Or la simple inspection des formules montre que la même table pourra servir pour les méridiens et pour les parallèles; en exprimant par les mêmes

nombres les latitudes l ou les longitudes t, les rayons ρ_m des méridiens et les distances α_p du centre des parallèles au centre de la projection seront exprimés respectivement par les mêmes nombres; il en sera de même des rayons ρ_p des parallèles et des distances β_m des centres des méridiens, et de même aussi des distances du centre de la projection aux points les plus proches des méridiens et des parallèles.

La mappemonde n° II a été construite à l'aide de la table suivante, qui donne les éléments nécessaires pour les valeurs de l et t de 5° en 5°, en supposant le rayon de la sphère pris pour unité:

l ou t	ρ_m ou α_p	ρ_p ou β_m	δ_m ou δ_p	l ou t
0°	∞	∞	0,00000	0°
5	11,47371	11,43005	0,04366	5
10	5,75877	5,67128	0,08749	10
15	3,86370	3,73205	0,13165	15
20	2,92380	2,74748	0,17633	20
23° 27′ 30″	2,51204	2,30442	0,20762	23° 27′ 30″
25	2,36620	2,14451	0,22169	25
30	2,00000	1,73205	0,26795	30
35	1,74345	1,42815	0,31530	35
40	1,55572	1,19175	0,36397	40
45	1,41421	1,00000	0,41421	45
50	1,30541	0,83911	0,46631	50
55	1,22077	0,70021	0,52057	55
60	1,15470	0,57735	0,57735	60
65	1,10338	0,46631	0,63707	65
66° 32′ 30″	1,09009	0,43395	0,65616	66° 32′ 30″
70	1,06418	0,36397	0,70021	70
75	1,03528	0,26795	0,76733	75
80	1,01543	0,17633	0,83910	80
85	1,00382	0,08749	0,91633	85
90	1,00000	0,00000	0,10000	90

Lorsque l'échelle de la projection est très-grande, il devient difficile de décrire les méridiens et les parallèles à l'aide du compas, et il est plus exact de construire par coordonnées leurs points d'intersection à l'aide des formules générales. Nous avons donné au § 5 du chapitre IV (1re partie) le moyen de construire graphiquement dans

les projections perspectives méridiennes les valeurs de x et de y; nous n'y reviendrons pas.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE HORIZONTALE.

8. Considérons maintenant le cas général où l'on veut construire la projection d'un hémisphère sur l'horizon d'un lieu Z donné par sa latitude λ, en supposant les longitudes comptées à partir du méridien de ce lieu. Le point de vue est le point diamétralement opposé au point Z.

Les équations des parallèles sont

$$(x^2 + y^2)(\sin\lambda + \sin l) + 2ax\cos\lambda + a^2(\sin l - \sin\lambda) = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon est

$$\rho_p = \frac{a\cos l}{2\sin\frac{l+\lambda}{2}\cos\frac{l-\lambda}{2}};$$

les coordonnées du centre sont

$$\alpha_p = -\frac{a\cos\lambda}{2\sin\frac{l+\lambda}{2}\cos\frac{l-\lambda}{2}} \quad \text{et} \quad \beta_p = 0.$$

Ces cercles coupent l'axe des x (fig. 67) qui représente le premier méridien en deux points n et n' dont les distances δ et δ' au centre de la carte sont

$$\delta = a\,\text{tang}\frac{l-\lambda}{2}; \quad \delta' = a\,\text{cotang}\frac{l+\lambda}{2}$$

pour l'équateur $l = 0$; on obtient donc

$$\rho_0 = a\,\text{coséc}\,\lambda,$$
$$\alpha_0 = -a\,\text{cotang}\,\lambda,$$
$$\delta_0 = -a\,\text{tang}\frac{\lambda}{2}; \quad \delta'_0 = a\,\text{cotang}\frac{\lambda}{2}.$$

Les coordonnées des pôles s'obtiendront en faisant $l = \pm 90°$ dans l'expression de α_p; on aura ainsi

$$p = a\,\text{tang}\frac{90° - \lambda}{2},$$
$$p' = -a\,\text{cotang}\frac{90° - \lambda}{2}.$$

La distance des pôles est donc

$$pp' = 2a \operatorname{séc} \lambda.$$

Le milieu F de pp' sera donné par sa distance f au centre O

$$f = \frac{pp'}{2} - Op = a \operatorname{tang} \lambda.$$

L'équation des méridiens est

$$(x^2 + y^2) \sin t \cos \lambda + 2ay \cos t - 2ax \sin \lambda \sin t - a^2 \sin t \cos \lambda = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2) \cos \lambda + 2ay \operatorname{cotang} t - 2ax \sin \lambda - a^2 \cos \lambda = 0,$$

équation d'un cercle dont le rayon ρ_m est

$$\rho_m = \frac{a}{\cos \lambda \sin t} = a \operatorname{séc} \lambda \operatorname{cosèc} t,$$

et dont les coordonnées du centre sont

$$\alpha_m = a \operatorname{tang} \lambda; \quad \beta_m = -\frac{a \operatorname{cotang} t}{\cos \lambda}.$$

On voit donc que les centres de tous les méridiens sont sur une perpendiculaire au premier méridien passant par le milieu de la distance des pôles, à une distance de ce point égale à

$$a \operatorname{cotang} t \operatorname{séc} \lambda.$$

Nous allons maintenant nous occuper de la construction graphique.

On décrira d'abord (fig. 68) avec un rayon égal à celui de la sphère réduit à l'échelle de la carte une circonférence qui représentera l'horizon du lieu pris pour centre, et à partir d'un diamètre (0,180°) qui représentera le méridien du lieu, pris pour premier méridien, on divisera cette circonférence en degrés de chaque côté. On portera alors la latitude λ du lieu central de 0° en P et 180° en P' et en joignant le point H' (90°) à P et à P' on obtiendra en p et p' les projections des pôles. On vérifie de suite sur la figure que

$$op = a \operatorname{tang} \frac{90° - \lambda}{2}, \quad op' = a \operatorname{cotang} \frac{90° - \lambda}{2}.$$

On déterminera deux points de chaque parallèle en portant sur la

circonférence de la carte, à droite et à gauche de P, le complément de sa latitude, et joignant ces points N et N′ au point H′ (90°). On voit ainsi que

$$On = \text{tang}\,\frac{l-\lambda}{2}; \quad On' = \text{cotang}\,\frac{l+\lambda}{2}.$$

Le centre C de la projection de ce parallèle sera au milieu de nn' à une distance CO du centre de la carte égale à

$$CO = \frac{a\cos\lambda}{2\sin\dfrac{l+\lambda}{2}\cos\dfrac{l-\lambda}{2}};$$

le rayon sera la moitié de nn'

$$\rho_p = \frac{a\cos l}{2\sin\dfrac{l+\lambda}{2}\cos\dfrac{l-\lambda}{2}}.$$

Pour déterminer l'équateur on aura de même les deux points e et e' et l'on remarquera que le cercle cherché devra passer par les deux points marqués 90°; d'ailleurs,

$$Oe = \text{tang}\,\frac{\lambda}{2}; \quad Oe' = \text{cotang}\,\frac{\lambda}{2}.$$

Rappelons ici que lorsque la droite NN′ qui correspond à une latitude l rencontre le diamètre (0,180°), c'est-à-dire lorsque la latitude du parallèle est plus petite que le complément de la latitude du lieu sur l'horizon duquel on construit, on a immédiatement deux autres points AA′ de la projection, en élevant au point de rencontre α une perpendiculaire au diamètre (0,180°) jusqu'à la rencontre de la circonférence de l'hémisphère. Les trois points A, n, A′ toujours situés dans l'intérieur de la carte, suffiront pour construire le cercle dont le centre C devra, comme vérification, se trouver sur pp'.

Le parallèle tel que la droite NN′ passera par le point H′ (90°), c'est-à-dire dont la latitude sera égale à la latitude du point central, mais de dénomination contraire (boréale si λ est austral, austral si λ est boréal), sera seul représenté par une droite BB′ perpendiculaire à l'axe (0,180°).

9. Occupons-nous maintenant de la projection des méridiens. Tous les cercles que nous voulons construire passeront par les deux points p et p' et auront, par conséquent, leur centre sur la perpendiculaire KFK′ élevée sur le milieu de pp'. L'angle des tangentes au pôle au

méridien principal et au méridien considéré étant conservé en projection, la tangente en p au cercle cherché fera avec pp' un angle égal à la longitude t; on élèvera donc la droite pK faisant avec le diamètre (0,180°) qui contient déjà les pôles un angle 90° — t égal au complément de la longitude, et son intersection K avec la droite KFK' sera le centre cherché.

Il suffira donc, pour tracer tous les méridiens, de décrire du point p une circonférence que l'on divisera en arcs égaux de 1°, 5°, 10°, etc. de joindre les points de division au centre p et de prolonger ces rayons jusqu'à la droite KFK'; chaque intersection sera le centre d'un méridien dont Kp sera le rayon.

Lorsque la longitude du méridien diminue de 90° à 0°, le centre K s'éloigne de plus en plus du point F, et il devient alors difficile de décrire chaque circonférence. On détermine dans ce cas les deux points où chaque méridien rencontre l'horizon sur lequel on construit et l'on trace le cercle à l'aide de ces deux points et du pôle p, soit par points, soit d'un mouvement continu à l'aide d'une équerre mobile.

Si nous considérons sur la sphère (fig. 69) le triangle PMH formé par le premier méridien PH, par l'horizon HM et par le méridien considéré PM, nous voyons qu'il est rectangle en H, que l'arc PH $= \lambda$, et que l'angle P $= t$; on peut donc calculer l'arc HM $= x$, par la formule

$$\operatorname{tang} x = \sin\lambda \operatorname{tang} t.$$

En donnant donc à t les diverses valeurs des longitudes on déterminera par le calcul les points M et M' où chaque méridien perce l'horizon. Cette formule se construit graphiquement de la manière la plus simple.

D'un point quelconque, F par exemple, (fig. 68) du diamètre qui contient les pôles de la projection et représente le premier méridien, abaissons FD perpendiculaire sur la ligne PP'. Portons FD de F en G; faisons l'angle FGI égal à la longitude t considérée et joignons le point I au centre O de la carte; cette droite coupera le cercle de projection aux points cherchés M et M'. En effet, l'arc PO° étant égal à la latitude λ du lieu pris pour centre, FD est égal à OA sin λ; FI, dans le triangle FGI, est égal à FG tang t; or FG $=$ FD, donc

$$\mathrm{FI} = \mathrm{OA} \sin\lambda \operatorname{tang} t;$$

et par suite

$$\operatorname{tang} \mathrm{IOF} = \sin\lambda \operatorname{tang} t,$$

l'angle IOF est donc l'angle x que nous cherchions.

L'hémisphère (proj. n° III) a été tracé en projection stéréographique sur l'horizon de Paris.

10. Pour terminer ce qui a rapport à la projection stéréographique, nous allons traiter quelques problèmes qui se présentent souvent.

1° Par deux points *a* et *b* donnés sur la carte, faire passer un arc de grand cercle (fig. 70).

Joignons l'un quelconque des deux points au centre de la carte; élevons sur ce diamètre un autre rayon perpendiculaire OV et par le point V élevons VD perpendiculaire sur *a*V jusqu'à la rencontre du diamètre *a*O : le point D sera évidemment un troisième point de la circonférence qui doit passer par *a* et *b* et dont on pourra par conséquent déterminer le centre C. Si E et F sont les intersections de cette circonférence avec celle de la carte, il est facile de démontrer que les trois points EOF sont en ligne droite, ce qui servira de vérification.

2° Trouver le pôle d'un grand cercle donné (fig. 71).

Si le grand cercle n'est défini que par deux points, on commence par le tracer comme nous venons de l'indiquer et l'on détermine son diamètre EF commun à la circonférence de la carte ; on construit aussi le diamètre perpendiculaire à EF et l'on joint au point F son intersection *a* avec le grand cercle ; cette droite prolongée détermine sur la circonférence de la carte un point A à partir duquel on porte un arc de 90° de grand cercle ; on détermine ainsi un point B que l'on joint au point F ; le point *b* est le pôle cherché.

3° Par un point donné de la carte décrire un grand cercle faisant avec le plan de projection un angle donné φ (fig. 72).

Si le point donné *a* est sur la circonférence de la carte, il suffira de mener le diamètre de ce point et le diamètre perpendiculaire et de faire en *a* avec le premier un angle φ égal à l'angle donné ; on déterminera ainsi le centre cherché C du cercle qui passera par *a* et *b*.

Si le point donné *a'* n'est pas sur la circonférence, on décrira de ce point un arc de cercle avec $a \text{ séc } \varphi$ pour rayon, et du point central un second arc de cercle avec $a \text{ tang } \varphi$ pour rayon ; ces deux arcs détermineront par leur intersection le centre C du grand cercle cherché.

4° Construire l'horizon d'un lieu donné par sa projection *a* (fig. 73).

Il suffira de décrire du point central O un arc de cercle d'un rayon égal à la cotangente de la latitude du lieu donné ; son intersection C avec le rayon du point *a* sera le centre cherché. On pourrait aussi

faire en B, extrémité du diamètre perpendiculaire au rayon O*a*, un angle OBC égal au complément de la latitude du lieu donné ou à l'inclinaison de l'horizon cherché sur le cercle de projection.

5° Par un point donné *a* tracer un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné.

On déterminera le pôle *p* du cercle donné et par les points *a* et *p* on mènera un grand cercle qui sera nécessairement perpendiculaire au cercle donné.

6° Trouver la distance de deux points donnés en projection (fig. 74).

Nous avons traité cette question d'une manière générale dans les projections perspectives (1) ; la construction que nous avons indiquée sera toujours applicable et fort rapide. On peut aussi résoudre la question de la manière suivante : cherchons le pôle *p* du grand cercle passant par *a* et *b*; joignons *pa* et *pb* ; l'arc AB mesurera la distance cherchée.

7° Porter une distance donnée dans une direction donnée à partir d'un point de la carte (fig. 75).

Cette direction sera donnée par rapport à un arc de grand cercle tracé ou que l'on pourra toujours déterminer avec les données du problème. On mènera alors par le point donné la tangente à ce cercle, puis une droite faisant avec la première l'angle donné; cette droite devant être tangente au cercle cherché, il suffira de lui mener une perpendiculaire C*a* pour avoir un lieu de son centre. En joignant le point donné *a* au centre de la projection, élevant le rayon perpendiculaire OV, joignant *a*V et faisant l'angle droit *a*V*a*', on déterminera en *a*' un second point du cercle cherché; la rencontre du rayon déjà tracé C*a* avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de *aa*' déterminera le centre C du grand cercle cherché.

Pour porter sur ce cercle une longueur donnée en degrés et fractions, on joindra *a*V et l'on portera sur la circonférence de la carte de A en B l'arc de grand cercle qui mesure la distance donnée; on joindra VB et l'intersection *b* de cette droite avec le cercle que l'on aura tracé sera l'extrémité de la distance donnée.

8° Mesurer l'angle de deux grands cercles données (fig. 76). On détermine les deux pôles *p* et *p*' que l'on joint ensuite au point d'intersection *a* des deux cercles; la distance AA' évaluée en degrés et fractions sera l'angle cherché.

(1) *Voir* 1re partie, chap. 4, § 7.

9° Par un point a donné sur la carte, mener un méridien et un parallèle (fig. 77).

Après avoir obtenu la ligne des centres des méridiens, KK', on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de la droite pa qui joint le point a au pôle terrestre, et du point K comme centre on décrira avec Kp pour rayon l'arc ap qui sera la projection du méridien demandé.

Pour obtenir le parallèle du point a, remarquons d'abord que le centre doit se trouver sur la ligne des pôles po et qu'il suffirait d'un autre point de ce parallèle pour résoudre le problème. Si l'on avait la distance du point a au pôle p et que le méridien po fût gradué, le point de ce méridien situé à la même distance angulaire du pôle appartiendrait à ce parallèle. Cherchons donc (problème 6) la corde de l'arc de méridien qui, sur le globe, joint le pôle au point a, puis portons cette corde sur la circonférence de la carte supposée divisée afin de connaître le nombre de degrés qu'elle sous-tend. Le reste de la construction s'effectuera sans difficulté.

Le problème que nous venons de résoudre peut être énoncé ainsi :

Étant donnée la position d'un point en projection stéréographique, trouver sa longitude et sa latitude sur la sphère.

Si la construction que nous venons d'indiquer ne paraît pas donner une exactitude suffisante, on peut recourir aux équations des méridiens et des parallèles et calculer la longitude t et la latitude l en fonction des coordonnées x et y du point donné. On tire en effet de l'équation des méridiens

$$\operatorname{cotang} t = \frac{x}{y}\sin\lambda + \frac{\cos\lambda}{2ay}[a^2-(x^2+y^2)];$$

et de l'équation des parallèles

$$\sin l = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{a^2+(x^2+y^2)}\sin\lambda - \frac{2ax}{a^2+(x^2+y^2)}\cos\lambda.$$

Dans le cas de la projection stéréographique polaire, ces équations se réduisent à

$$\operatorname{cotang} t = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \sin l = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{a^2+(x^2+y^2)}.$$

Dans le cas de la projection méridienne,

$$\operatorname{cotang} t = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{2ay} \quad \text{et} \quad \sin l = -\frac{2ax}{a^2+y^2+x^2}.$$

CHAPITRE II.

PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE.

1. La projection orthographique est une projection perspective dans laquelle l'œil est supposé à une distance infinie de la surface de l'hémisphère à représenter qui, contrairement à ce qui a lieu dans la plupart des autres projections perspectives, est l'hémisphère antérieur, c'est-à-dire celui que l'on verrait directement. La projection orthographique est donc une véritable projection *orthogonale* dans laquelle chaque point se projette sur un plan convenablement choisi par une perpendiculaire abaissée sur ce plan ; il en résulte que la position de ce plan par rapport au centre du globe est tout à fait insignifiante et ne fait pas même varier l'échelle de la construction.

Nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement de la terre ; la projection orthographique, en effet, n'est et ne doit être employée en géographie que pour la représentation des hémisphères entiers, car ses défauts sont considérables et ne peuvent être compensés que par les avantages qui ne résident que dans la facilité de son tracé.

2. Rappelons en quelques mots les altérations d'angles et de longueurs que nous avons calculées précédemment (1).

Un angle α fait sur la surface de la sphère par une direction quelconque avec un méridien sera représenté sur la projection par un angle β tel que

$$\tang \beta = \frac{\tang \alpha}{\cos \theta},$$

en désignant par θ l'arc de grand cercle qui unit sur la sphère le sommet de l'angle au centre de la projection. Cet arc θ se calculera comme nous l'avons indiqué au § 3 de la projection stéréographique.

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, §§ 11 et 12.

L'altération est donc mesurée par

$$\operatorname{tang}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\theta}-\operatorname{tang}\alpha}{1+\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\cos\theta}}=\frac{\operatorname{tang}\alpha(1-\cos\theta)}{\cos\theta+\operatorname{tang}^2\alpha}.$$

L'angle A de la sphère qui correspond à l'altération maximum B — A est donné par la formule

$$\operatorname{tang}A=\pm\sqrt{\cos\theta}.$$

et l'angle correspondant B de la carte par la formule

$$\operatorname{tang}B=\pm\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}.$$

de telle sorte que l'altération maximum est mesurée par

$$\operatorname{tang}(B-A)=\frac{1-\cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}.$$

On voit que l'altération, nulle au centre, va en croissant avec θ, et que, à la circonférence de la carte, lorsque $\theta=90°$, elle est de $90°$; quant à l'angle le plus altéré A, il est de $45°$ au centre et décroît jusqu'à zéro.

Le rapport minimum m_0 et le rapport maximum $m_{\frac{\pi}{2}}$ des distances élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère autour d'un point situé à une distance θ du centre correspondent, l'un au rayon qui joint ce point au centre, et l'autre à l'almicantarat, c'est-à-dire à la circonférence décrite de ce centre; le rapport M^2 des surfaces élémentaires de la carte et de la sphère est égal au produit $m_0\, m_{\frac{\pi}{2}}$, et l'on a

$$m_0=\cos\theta;\qquad m_{\frac{\pi}{2}}=1;\qquad M^2=\cos\theta,$$

ce qui exprime que les almicantarats sont toujours projetés en vraie grandeur; sur les rayons le rapport minimum m_0 est égal à l'unité au centre de la projection et décroît jusqu'à la circonférence de la carte où il est nul; le rapport M^2 passe par les mêmes valeurs.

On voit donc que la déformation et l'altération des surfaces augmentent depuis le centre jusqu'à la circonférence; si l'on considère

deux petits arcs égaux s touchant l'un au centre, l'autre à la circonférence, le premier a pour projection $a \sin s$, le second $a\,(1 - \cos s)$; les deux projections sont donc entre elles comme

$$\frac{\sin s}{1 - \cos s} = \text{cotang}\,\frac{s}{2}.$$

3. Les points de la projection orthographique pourront toujours se construire à l'aide de leurs coordonnées x et y rapportées à deux axes rectangulaires passant par le centre et dont le premier représente le premier méridien.

En appelant λ la latitude du point central ou le complément de l'inclinaison de l'équateur sur le plan sur lequel on projette, les formules qui expriment les coordonnées sont

$$x = a(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l),$$
$$y = a\cos l\sin t.$$

Ces formules générales se modifient dans les deux cas particuliers de projection équatoriale et de projection méridienne que nous allons étudier d'abord.

PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE ÉQUATORIALE OU POLAIRE.

4. Pour exprimer que le pôle est pris pour centre et l'équateur pour plan de projection, nous ferons dans les formules précédentes $\lambda = 90°$; nous obtenons alors

$$x = a\cos l\cos t,$$
$$y = a\cos l\sin t;$$

donc

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,t \quad \text{et} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2 l = r^2.$$

Les parallèles sont projetés en véritable grandeur et les méridiens sont représentés par des rayons faisant avec le premier méridien les angles qui expriment leurs longitudes. La construction sera donc des plus faciles, et pourra être rendue aussi exacte que possible à l'aide de la table qui donne les rayons des parallèles terrestres en supposant le rayon de l'équateur pris pour unité.

Tout autre cercle de la sphère se projetterait suivant une ellipse facile à construire; le grand axe sera le diamètre parallèle au plan de

projection, et le petit axe sera égal à ce premier multiplié par le cosinus de l'inclinaison du plan du cercle considéré sur le plan de projection.

PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE MÉRIDIENNE.

5. Les formules générales deviennent, en faisant $\lambda = 0$,

$$x = a \sin l,$$
$$y = a \cos l \sin t.$$

La première équation ne contenant pas t est celle des parallèles qui sont par conséquent des droites parallèles à l'axe des y, lequel représente l'équateur.

L'équation des méridiens est

$$x^2 \sin^2 t + y^2 = a^2 \sin^2 t;$$

les méridiens sont donc des ellipses dont le grand axe, dirigé suivant l'axe des x, est égal à $2a$, et dont le petit axe, dirigé suivant l'équateur, est égal à $2a \sin t$.

Ces résultats se vérifient immédiatement sur la figure 78. On divisera donc la circonférence de la carte en degrés et fractions à partir du diamètre EE′ qui représente l'équateur et l'on mènera par les points de division des droites parallèles qui représenteront les parallèles de la sphère. Pour construire les méridiens dont le grand axe est PP′, on détermine d'abord le petit axe en comptant à partir des points E et E′ sur la circonférence de la carte le complément de la longitude et projetant perpendiculairement les extrémités M de ces arcs sur l'équateur. Connaissant les deux axes, on pourra construire facilement chaque ellipse. On pourra d'ailleurs obtenir très-facilement autant de points que l'on voudra en cherchant la projection du point d'intersection du méridien considéré avec un parallèle quelconque. Il suffira pour cela de décrire du centre de la carte avec un rayon égal au demi-diamètre du parallèle une circonférence dont le point d'intersection a avec le rayon MO, projeté sur le parallèle NN′, donnera le point cherché A.

Cette construction permet de trouver directement la projection d'un point donné par sa latitude et sa longitude.

Plusieurs remarques permettent de simplifier encore la construction des méridiens. Le premier méridien une fois divisé par la con-

struction même des parallèles, il suffira pour diviser l'équateur et obtenir, par conséquent, les petits axes des ellipses méridiennes, de reporter à partir du centre les divisions du premier méridien. Cela résulte de cette propriété commune à toute projection perspective et même à toute projection zénithale que tous les grands cercles passant par le point central sont projetés suivant la même loi, de sorte que des arcs égaux sur chacun d'eux sont représentés par des longueurs égales.

Pour opérer la division de chaque parallèle, c'est-à-dire obtenir ses intersections avec les différents méridiens, on pourra construire un triangle équilatéral sur le rayon a de la projection (fig. 79), porter la graduation de l'équateur de O vers E, de P vers O et de P vers E, tirer les droites 10-10, 20-20, etc., parallèles à la base OE, et les droites P10, P20, etc.; les premières représenteront les parallèles de la projection coupés comme ils doivent l'être par les méridiens de 10°, 20°, etc., de longitude; les méridiens seront ainsi déterminés par points aussi rapprochés qu'on le voudra.

La projection n° XXVII a été dressée dans ce système.

PROJECTION ORTHOGRAPHIQUE HORIZONTALE.

6. Le plan de projection est supposé parallèle à l'horizon du point central dont le λ désigne la latitude.

Les projections des parallèles, des méridiens et, en général, de tout cercle de la sphère, sont des ellipses toujours faciles à construire soit par points, soit à l'aide de leurs axes.

L'équation des méridiens est

$$y^2(1-\sin^2\lambda\sin^2 t)-xy\sin\lambda\sin 2t+x^2\sin^2 t-a^2\cos^2\lambda\sin^2 t=0,$$

équation d'une ellipse dont le centre est à l'origine des coordonnées, dont le demi grand axe A est égal au rayon a de la sphère, et dont le demi petit axe B est

$$B=a\cos\lambda\sin t.$$

L'angle ω du grand axe avec l'axe des x qui représente le premier méridien, est donné par la formule

$$\tang\omega=\sin\lambda\tang t.$$

Les axes seront donc faciles à construire en grandeur et en direction, et l'ellipse sera déterminée.

L'équation des parallèles est

$$y^2 \sin^2\lambda + x^2 + 2ax\cos\lambda\sin l - a^2\sin(\lambda - l)\sin(\lambda + l) = 0,$$

équation d'une ellipse dont le demi grand axe B' est égal à a cos l, c'est-à-dire au rayon même du parallèle, et dont le demi petit axe A' est égal à a cos l sin λ et dirigé dans le premier méridien.

Les coordonnées du centre étant $\beta' = o$, $\alpha' = a\cos\lambda\sin l$, on voit que ce centre est sur le premier méridien, à une distance a cos λ sin l du centre de la carte.

On obtient l'équation de l'équateur en faisant dans l'équation des parallèles $l = 0$; on trouve ainsi

$$y^2 \sin^2\lambda + x^2 - a^2\sin^2\lambda = 0,$$

équation d'une ellipse dont le centre est au centre de la carte, et dont les axes A'', B'' sont donnés par

$$A'' = a\sin\lambda, \quad B'' = a.$$

Les pôles p et p' sont à une distance du centre égale à

$$p = \pm a\cos\lambda.$$

7. Occupons-nous maintenant de la construction graphique.

Les projections p et p' des pôles (fig. 80) se construisent d'abord en menant le diamètre PP' faisant avec le premier méridien l'angle λ qui représente la latitude du point central et abaissant les perpendiculaires Pp, P'p' sur ce premier méridien.

Les grands axes des ellipses méridiennes doivent évidemment coïncider avec les traces mêmes des plans des méridiens, c'est-à-dire avec leurs intersections avec le plan sur lequel on construit. Nous avons montré, en parlant de la projection stéréographique, comment on devait construire ces intersections. D'un point quelconque F du premier méridien ZZ', on abaissera une perpendiculaire sur le diamètre PP' qui fait avec le premier l'angle λ, et l'on reportera cette perpendiculaire sur le premier méridien à partir du point F ; de l'extrémité K de cette longueur, on mènera des droites KD faisant avec ZZ' des angles égaux aux longitudes des méridiens, et l'on joindra au centre de la carte les intersections D de ces droites avec la perpendiculaire élevée en F sur ZZ' ; les diamètres ainsi obtenus seront les grands axes des ellipses méridiennes et feront avec le premier méridien ZZ' un angle x tel que

$$\text{tang}\, x = \sin\lambda\, \text{tang}\, t.$$

On connaît ainsi le grand axe et un point p de l'ellipse cherchée, ce qui suffit pour la construire tout entière; mais on peut déterminer directement le petit axe qui doit faire avec le plan de projection un angle égal à l'inclinaison du méridien considéré sur ce plan.

Dans le triangle sphérique PHM (fig. 81) dans lequel nous désignons HM par x, nous connaissons $PH = \lambda$, et l'angle $HPM = t$; nous avons donc

$$\operatorname{tang} PMH = \operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin x}.$$

Cet angle M est facile à construire. Abaissons pM' (fig. 1) perpendiculaire sur le grand axe AA' que nous avons construit; décrivons de p l'arc M'M jusqu'à la rencontre du premier méridien et joignons MP; l'angle pMP sera égal à l'angle M. En effet, comme l'arc Az est, par construction, égal à l'arc x,

$$pM' = pM = pO \sin x = a \sin x \cos\lambda,$$
$$pP = a \sin\lambda = a \sin x \cos\lambda \operatorname{tang}(pMP);$$

donc

$$\operatorname{tang} pMP = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin x} = \operatorname{tang} M.$$

On n'aura donc plus qu'à mener le rayon Ob parallèle à MP, à abaisser bb' perpendiculaire sur le premier méridien et à décrire du point central O, l'arc b'B jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire élevée en O sur le grand axe AA'; OB' représentera le demi petit axe et la construction de l'ellipse s'achèvera facilement.

8. Occupons-nous maintenant des parallèles. A partir du point P (fig. 82) tel que $ZOP = \lambda$, on portera sur la circonférence de la carte les arcs PN, PN' qui mesurent le complément de la latitude, et l'on projettera N et N' sur le premier méridien par des perpendiculaires Nn, N'n'; nn' sera le petit axe de l'ellipse cherchée et devra être égal à $2a \cos l \sin\lambda$. Comme le grand axe de cette projection est le diamètre même du parallèle, lequel est égal à $NN' = 2NC$, il est clair qu'après avoir déterminé la projection γ du centre, il faudra prendre sur Cγ et de part et d'autre de nn' deux distances $c\gamma$, $c'\gamma$ égales chacune au rayon CN du parallèle, c'est-à-dire à $a \cos l$.

Les deux axes étant déterminés, il n'y a plus de difficulté pour tracer les parallèles. Parmi les méthodes connues la plus simple dans ce cas sera de décrire la demi-circonférence sur NN' comme diamètre, de la partager en arcs égaux, et du pied de chaque

corde telle que $A\alpha$ d'abaisser sur nn' une perpendiculaire $\alpha A'$ sur laquelle on portera de part et d'autre de A' une longueur égale à la demi-corde $A\alpha$; a et a' seront deux points de l'ellipse.

Cette remarque permet de construire immédiatement la projection d'un point donné par sa latitude et sa longitude. On tracera d'abord la corde NN' à une distance de P égale au complément de la latitude comptée sur la circonférence de la carte, et l'on décrira la demi-circonférence NAN'; puis on fera en C avec NN' un angle ACN égal au complément de la longitude donnée, on projettera le point A orthogonalement par deux perpendiculaires, d'abord sur NN', puis sur le premier méridien, et l'on portera sur la seconde perpendiculaire la longueur de la première $A\alpha$; le point a ainsi obtenu sera la projection cherchée. Comme la figure est symétrique par rapport au premier méridien, on obtiendra en même temps les deux points de même latitude et de longitudes égales de part et d'autre de ce méridien.

On voit aussi que, si l'on commence par construire les projections des parallèles, on pourra obtenir pour chacun d'eux les points qui ont même longitude, et pour tracer ensuite les méridiens, il suffira de faire passer des courbes par les points correspondants.

9. Pour terminer ce qui a rapport à la projection orthographique, nous allons traiter plusieurs questions qui se présentent souvent.

1° Trouver la distance de deux points *a* et *b* donnés sur la carte (fig, 83).

La solution que nous donnons ici n'est qu'un cas particulier de la solution générale que nous avons donnée en traitant des projections perspectives en général. En chaque point donné, on élèvera une perpendiculaire sur le rayon de ce point, et l'on reportera, par deux arcs de cercle A'A, B'B, sur les perpendiculaires *a*A, *b*B, élevées sur *ab* les longueurs des demi-cordes ainsi obtenues. La droite AB représentera la corde de la distance cherchée ; il suffira de le porter sur la circonférence de la carte préalablement divisée en degrés et fractions pour mesurer l'arc sous-tendu.

2° Par deux points *a* et *b* donnés sur la carte, faire passer un arc de grand cercle (fig. 84).

La solution de ce problème n'offrira aucune difficulté à ceux qui connaissent les éléments de la géométrie descriptive. On mènera le diamètre de l'un des points et l'on élèvera les perpendiculaires *aa'*,

$bb'\beta'$; sur cette dernière on portera à partir de β' une longueur égale à la demi-corde $b\beta$ du point b ; on joindra $a'b'$, et ab, et l'on prolongera ab jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire élevée en c, intersection de $a'b'$ avec le diamètre de a; le diamètre $m'oc'$ sera la trace du plan du grand cercle sur le plan de projection, et, par conséquent, mm' sera le grand axe de l'ellipse passant par a et b, et qu'il sera, dès lors, facile de construire par points.

3° Construire l'horizon d'un lieu donné par sa projection (fig. 85).

Élevez la corde aA perpendiculaire sur le rayon du point donné a, et portez sur la circonférence de la carte un arc de 90° à partir de A, ce qui revient à élever le rayon oB perpendiculaire sur le rayon oA; puis abaissez Bb perpendiculaire sur le rayon oa prolongé; ob sera le demi petit axe de l'ellipse cherchée, dont le grand axe sera le diamètre HH′ perpendiculaire sur oa.

4° Étant donnée la position d'un point a en projection orthographique, trouver sa latitude et sa longitude.

On construira le méridien du point a, c'est-à-dire l'arc de grand cercle passant par ce point et par la projection p du pôle, comme nous l'avons indiqué au problème 2, et l'on cherchera la distance ap pour avoir le complément de la latitude.

La construction se simplifie si la projection est faite sur le plan d'un méridien. Il suffira, par le point donné, de mener une parallèle à l'équateur pour avoir le parallèle de ce point; on décrira ensuite une demi-circonférence sur cette corde et l'on élèvera une perpendiculaire par le point donné; en joignant le point d'intersection A au centre de la demi-circonférence, on formera avec la ligne des pôles prolongée l'angle qui mesure la longueur cherchée.

CHAPITRE III.

PROJECTION CENTRALE OU GNOMONIQUE.

1. La projection centrale est une projection perspective faite sur un plan tangent à la sphère, et dont le point de vue est au centre du globe; chaque point de la carte est donc à l'extrémité de la sécante passant par le point correspondant de la surface sphérique. Il en résulte que la projection de tout grand cercle de la sphère est une ligne droite.

Ce tracé ne peut convenir pour représenter un hémisphère entier, les sécantes s'approchant de plus en plus d'être parallèles au plan de projection à mesure que le point considéré s'éloigne du point central; aussi cette projection exige-t-elle pour représenter la surface entière du globe *au moins* quatre plans différents (1).

Nous ne tiendrons pas compte de l'aplatissement parce que cette projection ne devant être, à cause de ses défauts, employée que fort rarement en géographie et seulement pour de grandes cartes physiques comme l'a fait M. Élie de Beaumont, la forme sphéroïdale de la terre ne peut apporter de modifications appréciables.

2. Rappelons en quelques mots les altérations d'angles et de longueurs que nous avons déjà calculées (2).

L'angle le plus altéré de la sphère est exprimé par

$$\operatorname{tang} A = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos \theta}},$$

en désignant par θ l'arc de grand cercle qui unit sur la sphère le sommet de cet angle au point central. L'angle correspondant B de la carte est donné par

$$\operatorname{tang} B = \pm \sqrt{\cos \theta},$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. IV, § 8.
(2) *Voir* 1re partie, chap. V, § 11-14.

de sorte que

$$\operatorname{tang}(B - A) = -\frac{1 - \cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}.$$

Cette dernière formule montre que l'angle de la sphère est toujours diminué en projection, que l'altération, nulle au centre, va en croissant avec θ, et qu'à 90° du centre elle est de 90°. Quant à l'angle le plus altéré A, il est de 45° au centre et croît jusqu'à 90°.

Le rapport maximum des distances élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère se rapporte à l'arc de grand cercle qui unit le point considéré au centre de la projection et s'exprime par

$$m_0 = \frac{1}{\cos^2\theta};$$

le rapport minimum, qui se rapporte à l'almicantarat de ce point, est exprimé par

$$m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\theta},$$

le rapport M^2 des surfaces élémentaires par

$$M^2 = \frac{1}{\cos^3\theta}.$$

On voit donc que chacun de ces rapports est égal à l'unité au centre de la projection, et infini pour $\theta = 90°$.

3. Les points de la projection centrale peuvent toujours se construire à l'aide de leurs coordonnées x et y exprimées par les formules suivantes que l'on obtient en faisant dans les équations générales des projections perspectives $D = 0$, et multipliant le résultat par a pour exprimer que le plan de projection ne passe plus par le centre, mais est tangent à la sphère :

$$x = \frac{a(\sin\lambda\cos l\cos t - \cos\lambda\sin l)}{\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l},$$

$$y = \frac{a\cos l\sin t}{\cos\lambda\cos l\cos t + \sin\lambda\sin l}.$$

Ces formules générales se modifient dans les deux cas particuliers de projection équatoriale et de projection méridienne que nous allons étudier d'abord.

PROJECTION CENTRALE POLAIRE OU ÉQUATORIALE

4. Le pôle étant pris pour centre, le plan de projection est parallèle à l'équateur; faisons donc dans les formules précédentes $\lambda = 90°$; il vient

$$x = a \operatorname{cotang} l \cos t,$$
$$y = a \operatorname{cotang} l \sin t.$$

L'équation des méridiens est alors

$$y = x \operatorname{tang} t;$$

les méridiens sont donc des droites passant toutes par le centre et faisant avec l'une d'elles, prise pour premier méridien, les angles qui expriment leurs longitudes.

L'équation des parallèles est

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cotang}^2 l;$$

les parallèles sont donc des cercles concentriques ayant pour rayons les cotangentes de leurs latitudes.

La construction graphique est des plus simples (fig. 87). On partage la circonférence de la carte en degrés et l'on joint le centre aux points de division qui expriment les latitudes comptées à partir du diamètre AA′ perpendiculaire au premier méridien; ces rayons prolongés interceptent sur la tangente TT′ parallèle à ce diamètre, les rayons des parallèles.

La projection n° XXIV a été dressée dans ce système.

PROJECTION CENTRALE MÉRIDIENNE.

5. Nous prenons pour plan de projection le plan tangent en un point de l'équateur et perpendiculaire au premier méridien; faisons donc dans les formules générales $\lambda = 0$; il vient

$$x = -a \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t}, \quad \text{et} \quad y = a \operatorname{tang} t.$$

L'équation des méridiens est donc

$$y = a \operatorname{tang} t;$$

celle des parallèles est

$$y^2 - x^2 \operatorname{cotang}^2 l + a^2 = 0;$$

les méridiens sont donc des droites parallèles faciles à construire, et les parallèles des hyperboles dont l'axe transverse dirigé dans l'axe des x est égal à $2a$ tang l, et dont l'autre axe perpendiculaire au premier méridien est égal à $2a$.

Le moyen le plus commode et le plus exact de construire ces hyperboles par points sera d'employer la coordonnée x qui se calculera facilement à l'aide de la formule

$$x = a \frac{\tang l}{\cos t},$$

et de calculer les intersections des parallèles avec les méridiens déjà tracés en donnant à l une certaine valeur, puis faisant venir t de 5 en 5 degrés ou de 10 en 10 degrés.

La projection nᵒ XXV a été construite dans ce système

PROJECTION CENTRALE HORIZONTALE.

6. Arrivons au cas général où le plan de projection est tangent en un point quelconque dont la latitude est λ

L'équation des méridiens est

$$y \cos t - x \sin\lambda \sin t = a \cos\lambda \sin t,$$

équation d'une droite faisant avec le premier méridien, qui est l'axe de x, un angle θ tel que

$$\tang \theta = \sin\lambda \tang t,$$

et coupant ce premier méridien en un point p, projection du pôle, distant du centre de

$$Op = a \operatorname{cotang} \lambda.$$

L'équation des parallèles est

$$y^2 \sin^2 l + x^2(\sin^2 l - \cos^2\lambda) + 2ax \cos\lambda \sin\lambda + a^2 \cos^2\lambda - a^2 \cos^2 l = 0,$$

équation d'une section conique dont le grand axe coïncide avec le premier méridien et qui est

une ellipse	si $\sin l > \cos\lambda$	ou	$l > 90° - \lambda$,
hyperbole	$\sin l < \cos\lambda$		$l < 90° - \lambda$,
parabole	$\sin l = \cos\lambda$		$l = 90° - \lambda$.

Considérons successivement ces trois cas.

1er CAS. $l > 90° - \lambda$. Les demi-axes A′ et B′ de l'ellipse sont

$$A' = \frac{a}{2} \frac{\sin 2l}{(\sin^2 l - \cos^2 \lambda)}; \quad B' = \frac{a \cos l}{\sqrt{\sin^2 l - \cos^2 \lambda}};$$

les coordonnés α' et β' du centre

$$\alpha' = -\frac{a}{2} \frac{\sin 2\lambda}{(\sin^2 l - \cos^2 l)}; \quad \beta' = 0.$$

2e CAS. $l < 90° - \lambda$. Les demi axes de l'hyperbole sont

$$A' = \frac{a \sin 2l}{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}; \quad B' = \frac{a \sin \lambda}{\sqrt{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}},$$

et le centre est à une distance du centre de la carte égale à

$$\alpha' = -\frac{a}{2} \frac{\sin 2\lambda}{\cos(l-\lambda)\cos(l+\lambda)}.$$

3e CAS. $l = 90° - \lambda$. L'équation des parallèles est alors

$$y^2 \sin^2 \lambda + ax \sin 2\lambda - a^2 \cos 2\lambda = 0.$$

En appelant P le demi paramètre, c'est-à-dire le double de la distance du sommet au foyer de la courbe, et α' et β' les coordonnées du sommet, on a

$$P = -2a \operatorname{cotang} \lambda; \quad \alpha' = a \operatorname{cotang} 2\lambda; \quad \beta' = 0.$$

Pour l'équateur on a $l = 0$; son équation est donc

$$x = a \operatorname{tang} \lambda,$$

équation d'une droite perpendiculaire au premier méridien, et située à une distance du centre égale à $a \operatorname{tang} \lambda = O\varepsilon$ (fig. 88).

Comme $Op = a \operatorname{cotang} \lambda$,

$$p\varepsilon = pO + O\varepsilon = a \operatorname{cotang} \lambda + a \operatorname{tang} \lambda = \frac{a}{\cos \lambda \sin \lambda}.$$

donc

$$\varepsilon e = p\varepsilon \operatorname{tang} \theta, \quad \text{ou} \quad \varepsilon e = \frac{a \operatorname{tang} t}{\cos \lambda}.$$

Au lieu de tracer directement les parallèles, il est plus commode

de déterminer dans les méridiens pm, pm', pm'' préalablement tracés les points dont la latitude est l, puis de joindre ces points par une courbe.

Cherchons donc la projection m du point M dont la longitude est $t = \text{OPM}$ et dont la latitude est $l = 90° - \text{PM}$; la question revient à trouver la distance pm.

D'abord, dans le triangle $\text{C}p\text{O}$,

$$\text{C}p = \frac{\text{CO}}{\sin\lambda} = \frac{a}{\sin\lambda}$$

Dans le triangle $\text{C}pm$,

$$\text{C}mp + \text{C}pm = 180° - p\text{C}m = 90° + l,$$

ou

$$\text{C}mp = 90° + l - \text{C}pm.$$

Appelant k l'angle $\text{C}pm$ et θ l'angle $\text{O}pm$; le trièdre dont les arrêtes sont $p\text{P}$, $p\text{O}$, pm, nous donnera

$$\cos k = \cos\theta \cos\lambda,$$

et le triangle $\text{C}pm$

$$pm = p\text{C}\frac{\sin p\text{C}m}{\sin \text{C}mp} = \frac{a\cos l}{\sin\lambda\cos(l-k)},$$

expression qui donne la distance cherchée en fonction de λ, l, t.

Nous déterminerons d'abord k par la formule

$$\cos k = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1 + \sin^2\lambda \tang^2 t}},$$

qui montre que k reste constant pour tous les points d'un même méridien. Pour chaque valeur de l on déterminera ensuite pm par l'expression

$$pm = \frac{a\cos l}{\sin\lambda\cos(l-k)}.$$

7. Voyons comment on peut construire graphiquement ces différentes valeurs.

A partir du point central O (fig. 89), on portera sur le premier méridien $\text{O}p$ une largeur $\text{O}p$ égale à la cotangente de la latitude λ de ce point, cotangente que l'on construira facilement en élevant OC perpendiculaire sur $\text{O}p$ et égal au rayon a réduit à l'échelle de la carte, et faisant en C l'angle $p\text{CO}$ égal à $90° - \lambda$. On construira de même

$O\varepsilon = a \tang \lambda$ en menant $C\varepsilon$ perpendiculaire sur Cp. On élèvera ensuite εe perpendiculaire sur $C\varepsilon$, et, en menant de C des droites faisant avec $C\varepsilon$ des angles égaux aux longitudes des méridiens que l'on veut construire, on déterminera sur εe les longueurs que ces méridiens intercepteront sur l'équateur représenté par εE perpendiculaire sur $p\varepsilon$.

Si nous nous reportons en effet à la figure qui précède celle que nous construisons, nous voyons que la droite εe est perpendiculaire sur $C\varepsilon$ et que, dans le triangle de l'espace $C\varepsilon e$ situé dans l'équateur, les intersections des méridiens doivent faire avec $C\varepsilon$ des angles égaux à leurs longitudes respectives.

On portera donc sur εE les longueurs $\varepsilon\mu'$ interceptées sur εe, en décrivant de ε des arcs de cercle, et en joignant les points μ ainsi obtenus au point p, on aura tracé les méridiens de la projection.

Il est facile, du reste, de vérifier que $\varepsilon\mu$ est égal à $\frac{a \tang t}{\cos \lambda}$, valeur que nous avons trouvée par le calcul.

Cherchons maintenant le point de chaque méridien dont la latitude l est donnée. Revenons encore à la figure qui précède et considérons le triangle de l'espace Cpe dont le côté Ce est dans l'équateur et qui est, par conséquent, rectangle en C. Son intersection PM avec la sphère est le méridien dont la projection est pm et sur lequel le point M est situé à une distance MP du pôle P égale à $90° - l$. La droite CM prolongée détermine par son intersection avec l'hypoténuse pe le point m cherché. Il est facile de construire ce triangle Cpe sur la figure auxiliaire. Il suffira de porter sur la ligne $C\varepsilon$, déjà tracée perpendiculairement à pC, la distance $Cb = C\mu'$ qui correspond à la droite Ce de la figure précédente. La droite pb sera égale à la distance du pôle à l'équateur de la carte et par suite à $p\mu$, et pourrait donc s'obtenir en décrivant de p un arc de cercle avec $p\mu$ pour rayon; mais la construction précédente sera toujours préférable.

On n'aura plus ensuite qu'à mener une droite telle que Cm' faisant avec $C\varepsilon$ l'angle $m'C\varepsilon$ égal à la latitude donnée l, son intersection m' avec la droite pb déterminera la distance pm' que l'on reportera de p en m sur le méridien déjà tracé $p\mu$.

Nous avons déjà supposé l'arc décrit de C avec $Co = a$ pour rayon, divisé en degrés à partir du rayon $C\varepsilon$ pour construire les méridiens; on pourra donc lire immédiatement sur cet arc les latitudes données et diviser très-rapidement chaque méridien de 5° en 5° ou de 10° en

10°. Il ne restera plus ensuite qu'à faire passer des courbes par tous les points de même latitude.

Il est facile de vérifier que *pm* est égal à

$$pm = \frac{a \cos l}{\sin \lambda \cos(l - k)},$$

comme nous l'avons trouvé par le calcul.

La projection n° XXVI a été construite sur l'horizon de Paris.

8. La projection centrale est peu employée en géographie, mais elle l'est plus souvent pour représenter une partie du ciel. Supposons (fig. 90) que l'on prenne le plan de projection perpendiculaire sur l'horizon ORH d'un observateur C dont la latitude géographique est représentée par φ, et que ce plan de projection soit assujetti à la condition de rencontrer l'horizon au point O dont l'azimut est ω; soit Z le zénith de l'observateur C et P le pôle.

Menons le méridien PZR de l'observateur C, et le vertical ZO qui fait avec ce méridien l'azimut donné RZO $= \omega$. L'arc PZ est égal au complément de la latitude de C, c'est-à-dire à $90° - \varphi$.

Continuons, pour rendre les formules précédentes applicables à ce cas particulier, à appeler λ le complément de l'angle PCO. Dans le triangle sphérique PZO nous connaissons le côté PZ $= 90° - \varphi$; l'angle PZO $= 180° - \omega$, et le côté ZO qui est égal à 90°; nous pouvons donc calculer l'angle ZOP $= \psi$ et le côté PO $= 90° - \lambda$ à l'aide des formules

$$\sin \lambda = -\sin \varphi \cos \omega,$$
$$\operatorname{tang} \psi = \sin \omega \operatorname{cotang} \varphi.$$

Si, dans le plan de projection, O*p* représente la projection du méridien OP et O*z* la projection de l'arc de grand cercle OZ, l'angle *z*O*p* est égal à l'angle ZOP $= \psi$; de même O*h* perpendiculaire à O*z* représentera la projection de l'horizon ORH et *ee* perpendiculaire à *pz* la projection de l'équateur EE'.

Traçons la ligne *oh* (fig. 91), projection de l'horizon; élevons la perpendiculaire *oz* et faisons l'angle *zop* $= \psi$, l'angle ψ étant calculé à l'aide de la formule

$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{cotang} \varphi \sin \omega;$$

op représentera le premier méridien. Pour trouver le point *p* on calculera d'abord λ à l'aide de la formule

$$\sin \lambda = -\sin \varphi \cos \omega,$$

puis *op* par la formule

$$op = a \operatorname{cotang} \lambda;$$

on prolongera ensuite *op* d'une longueur $o\varepsilon$ égale à a tang λ et la perpendiculaire zh à $po\varepsilon$ représentera l'équateur. La construction s'achèvera alors comme précédemment.

9. Nous terminerons l'étude de la projection centrale en donnant la solution du problème suivant :

Trouver la distance de deux points donnés sur la carte.

Dans la projection centrale tout grand cercle étant représenté par une ligne droite, la plus courte distance de deux points se trace immédiatement ; il est très-facile d'en trouver la grandeur.

En appliquant ici la solution générale de ce problème que nous avons donnée pour toutes les projections perspectives, on voit qu'il faut élever en o (fig. 92), centre de la projection, deux perpendiculaires à ao et ob, rayons des deux points donnés, et les prendre égales au rayon de la sphère; puis avec les trois côtés ab déjà connus, aC' et bC'' ainsi déterminés, construire le triangle aCb, et enfin décrire du point C avec un rayon égal à celui de la sphère, un arc de cercle AB qui mesurera la distance cherchée en degrés et fractions.

CHAPITRE IV.

PROJECTION DE LA GRANGE.

1. Ce système est orthomorphe, c'est-à-dire n'altère pas les angles, et représente les méridiens et les parallèles par des arcs de cercle comme la projection stéréographique qui n'est, du reste, qu'un cas particulier de celle-ci, beaucoup plus générale.

Nous avons traité avec des détails suffisants la théorie de cette projection; nous nous contenterons ici de rappeler les formules et les règles de la construction.

Prenons pour axes des coordonnées (fig. 93) le méridien et le parallèle du centre de la carte; ce parallèle sera représenté par une droite, soit l_0 sa latitude, z_0 sa colatitude; nous supposerons que l'on compte les longitudes t à partir de ce méridien central, ce qui revient à représenter par t la différence des longitudes d'un point quelconque et du centre de la carte.

De part et d'autre du centre O et à égale distance prenons sur l'axe des y deux points PP' qui représenteront les pôles; la distance $PO = P'O = A$ est arbitraire et fixe l'échelle de la carte.

Les méridiens feront aux pôles avec l'arc PP' des angles égaux à $2ct$, c étant une constante arbitraire; ces angles seront d'ailleurs les seuls altérés; c est ce que l'on appelle le coefficient de la carte. Nous verrons plus loin comment on peut le déterminer de la manière la plus avantageuse.

Les méridiens sont des circonférences qui ont pour équation

$$x^2 + y^2 + 2Ax \operatorname{cotang} 2ct - A^2 = 0.$$

Le centre est sur l'axe des x à une distance égale à

$$\alpha = A \operatorname{cotang} 2ct,$$

à droite si la longitude considérée t est occidentale, à gauche si t est orientale.

Le point d'intersection le plus proche du centre, du méridien considéré et de l'axe des x, est à une distance

$$OM = A \operatorname{tang} ct,$$

le point le plus éloigné est à la distance

$$OM' = A \operatorname{cotang} ct;$$

enfin le rayon ρ_m a pour expression

$$\rho_m = \frac{A}{\cos 2ct}.$$

Il suffira, pour obtenir chaque méridien, de décrire sur l'axe PP' un segment capable de l'angle 180° — $2ct$; lorsque le centre sera très-éloigné et sortira des limites de la feuille, on déterminera la courbe par points comme nous l'avons indiqué dans la projection stéréographique (1). Il sera toujours facile d'obtenir les points M et M' en prenant sur la circonférence décrite sur PP' comme diamètre les arcs Pm et Pm' égaux à $2ct$ et joignant P'm et P'm'; les intersections de ces droites avec l'axe des x seront les points cherchés.

2. Occupons-nous maintenant des parallèles. Leur équation est

$$x^2 + y^2 = 2Ay\frac{1+n^2}{1-n^2} + A^2 = 0,$$

en posant

$$n = \left(\frac{\operatorname{tang}\frac{z}{2}}{\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}}\right)^{2c},$$

et représentant par z le complément de la latitude considérée et par z_0 le complément de la latitude du point pris pour centre de la carte.

Les centres de ces cercles sont sur l'axe PP' prolongé à des distances β égales à

$$\beta = \frac{A^2(1+n^2)}{1-n^2}.$$

La distance δ de l'origine O des coordonnées au point N où ce parallèle coupe la ligne des pôles a pour expression

(1) *Voir* 2e part., chap. I.

$$\mathrm{ON} = \delta = \frac{A(1-n)}{1+n} = A\,\frac{\left(1 - \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}{\left(1 + \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}.$$

La distance ON′ du second point d'intersection est exprimée par

$$\mathrm{ON}' = \delta' = \frac{A(1+n)}{1-n} = A\,\frac{\left(1 + \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}{\left(1 - \operatorname{cotang}\frac{z_0}{2}\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c}}.$$

Enfin, le rayon ρ_p a pour valeur

$$\rho_p = \frac{2An}{(1-n^2)} = \frac{A^2 - \delta^2}{2\delta}.$$

Cette expression se construit facilement quand on connaît $\delta = \mathrm{ON}$; il suffit d'élever NB perpendiculaire sur PP′ jusqu'à la rencontre en B de la circonférence décrite sur PP′, de prendre OD = ON, et de décrire une circonférence ayant son centre sur PP′ et passant par D et B; ce centre sera l'intersection de PP′ et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de DB; l'intersection de cette circonférence et de PP′ prolongé sera le centre du parallèle cherché. On a en effet

$$\mathrm{NB}^2 = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{ON}^2 = \mathrm{ND}\,.\,\mathrm{DC}', \qquad \text{ou} \qquad A^2 - \delta^2 = 2\delta\,\rho_p.$$

Il est facile de voir que les distances d'un point quelconque d'un cercle de colatitude z aux deux pôles P et P′ sont entre elles dans le rapport de n à 1, c'est-à-dire de

$$\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right)^{2c} \quad \text{à} \quad \left(\operatorname{tang}\frac{z_0}{2}\right)^{2c}.$$

Sur la surface de la terre la circonférence de chaque parallèle est divisée par les méridiens en parties proportionnelles aux différences de longitude; il n'en est plus de même sur la carte, mais il est facile de démontrer que si A est un point quelconque ayant pour longitude t et pour complément de sa latitude z, la tangente trigonométrique de l'angle APP′ sera exprimée par

$$\operatorname{tang}\mathrm{APP}' = \frac{x}{A-y} = \frac{\mathrm{P'N}\sin 2ct}{\mathrm{PN} + \mathrm{P'N}\cos 2ct},$$

ce qui fournit la construction suivante pour trouver l'angle APP′.

Qu'on décrive du point N comme centre avec le rayon NP' une circonférence, et qu'on la divise à partir du pôle P' en parties qui correspondent aux angles $2ct$; qu'on mène ensuite de l'autre pôle P à chacune de ces divisions des droites PA prolongées s'il est nécessaire ; ces lignes diviseront le parallèle du point N en parties NA correspondantes à la différence de longitude t entre les méridiens PP' et PAMP'.

Le cercle dont il s'agit s'appelle, à cause de cette propriété, un cercle diviseur ; et, dans la projection stéréographique que l'on obtient en supposant $c = \frac{1}{2}$, les arcs de ce cercle expriment précisément les différences de longitudes.

Cette construction permettra, lorsque les parallèles seront tracés, de déterminer par points les méridiens dont le centre sortirait des limites de la feuille.

Lorsque, dans la projection de Lagrange, on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre, il suffit de remplacer, dans les formules précédentes, les distances polaires z et z_0 par les distances ζ et ζ_0 corrigées en tenant compte de l'aplatissement, et calculées dans la table III.

8. En un point quelconque de latitude $l = 90° - z$ et de longitude t, le rapport des distances élémentaires correspondantes de la carte et du sphéroïde est, comme dans toutes les projections orthomorphes, indépendant de la direction de ces distances ; il a pour valeur

$$m = \frac{4cA\sqrt{1 - e^2\cos^2 z}}{a\sin z\left[\left(\dfrac{\tang\frac{\zeta}{2}}{\tang\frac{\zeta_0}{2}}\right)^{2c} + 2\cos 2ct + \left(\dfrac{\tang\frac{\zeta_0}{2}}{\tang\frac{\zeta}{2}}\right)^{2c}\right]}.$$

Si l'on suppose la terre sphérique, cette expression se réduit à

$$m = \frac{4cA}{a\sin z\left[\left(\dfrac{\tang\frac{z}{2}}{\tang\frac{z_0}{2}}\right)^{2c} + 2\cos 2ct + \left(\dfrac{\tang\frac{z_0}{2}}{\tang\frac{z}{2}}\right)^{2c}\right]}.$$

Le point de la carte où ce rapport m diffère le moins de l'unité, c'est-à-dire où l'altération est *minimum*, est situé sur le méridien PP'

à partir duquel on compte les longitudes et a pour complément z_1 de sa latitude une distance polaire définie par la relation

$$\frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1} = \left(\frac{\tang \frac{z_1}{2}}{\tang \frac{z_0}{2}}\right)^{2c}.$$

Ainsi ce point jouit de cette propriété que le rapport de ses distances aux deux pôles P et P' est égal à

$$n_1 = \frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1}.$$

Autour de ce point les régions circonvoisines seront le moins altérées qu'il est possible dans leur grandeur et conserveront par conséquent à très-peu près leur forme naturelle, puisque d'ailleurs chaque partie infiniment petite de la projection est déjà par elle-même semblable à la partie correspondante de la figure de la Terre, en vertu de la nature de la projection; il sera donc avantageux, lorsqu'on aura une carte quelconque à construire, de faire en sorte que ce même lieu en occupe à peu près le milieu, parce qu'alors les pays représentés dans la carte seront le moins déformés qu'il sera possible et toujours d'autant moins qu'ils seront plus près du milieu.

On choisira donc, dans l'étendue du pays que l'on se propose de projeter, un des principaux lieux pour être placé à peu près au milieu de la carte, et l'on supposera que l'on compte les longitudes à partir du méridien de ce point qui sera représenté par une droite. Soit l_1 ou $90° - z_1$ sa latitude.

On déterminera d'abord l'exposant de la projection par la formule

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2 z_1}.$$

Ensuite, pour construire la carte, il n'y aura qu'à placer ce même lieu dans un point quelconque K qui soit vers le milieu de la carte, et, ayant mené une droite P'KP, on prendra de part et d'autre du point K les distances PK, P'K telles que

$$\frac{PK}{P'K} = \frac{2c - \cos z_1}{2c + \cos z_1};$$

le point P sera le pôle boréal et le point P' le pôle austral; la dis-

tance PP' = 2A sera l'axe même de la carte, dont la longueur est arbitraire et dépend de la grandeur ou de l'échelle qu'on veut donner à la carte.

On calcule ensuite la latitude $l_0 = 90° - z_0$ du centre de la carte, c'est-à-dire du milieu de PP', à l'aide de la formule

$$\left(\tang\frac{z_0}{2}\right)^{2c} = \frac{2c + \cos z_1}{2c - \cos z_1}\left(\tang\frac{z_1}{2}\right)^{2c} = \frac{\mathrm{P'K}}{\mathrm{PK}}\left(\tang\frac{z_1}{2}\right)^{2c}.$$

Connaissant les deux pôles, le coefficient de la carte et la latitude du centre, le reste de la construction s'achèvera comme nous l'avons indiqué.

4. Supposons qu'il s'agisse de construire une carte dont le milieu doive être occupé par la ville de Paris dont la latitude est 48° 50′ 14″. On aura $z_1 = 41°9'46''$, et par suite

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2(41°9'46'')} = 1{,}1972$$

et

$$n_1 = \frac{0.4444}{1{,}9500} = 0{,}2279.$$

On prendra donc pour l'exposant $2c$ de la projection le nombre 1,1972; ensuite, en supposant que Paris soit au point K, on déterminera les pôles P et P' en sorte que $\frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{P'K}} = 0{,}2279$. Pour avoir la latitude du milieu de PP' on calcule

$$\log\left(\tang\frac{z_0}{2}\right) = -\frac{1}{2c}\log n_1 + \log\left(\tang\frac{z_1}{2}\right) = 0{,}1115,$$

d'où

$$z_0 = 105°33'00'',$$

ce qui montre que le milieu de PP' a une latitude *australe* égale à 15° 33′ 00″.

Sur cette carte les angles seront partout les mêmes que sur la sphère excepté aux pôles où les méridiens feront avec celui de Paris des angles égaux à 1,1972..t; dix degrés seront donc représentés aux pôles par 11° 58′ 19″,2.

Nous avons dit que la grandeur A de la moitié de la distance des pôles était arbitraire et servait à fixer l'échelle de la carte. Cette échelle se détermine ordinairement par la condition que, autour du point K, les arcs élémentaires soient égaux à ceux qui leur corres-

pondent sur la sphère. En ce point le rapport d'agrandissement est exprimé par

$$m = \frac{4cA}{a \sin z_1 \left[n_1 + \frac{1}{n_1} + 2 \right]},$$

en égalant m à l'unité on en déduira

$$A = \frac{a \sin z_1}{4c} \left(n_1 + \frac{1}{n_1} + 2 \right).$$

Dans l'exemple que nous avons pris on trouverait

$$A = a \,.\, 1{,}8186.$$

La projection n° IV est construite dans ce système.

5. Lorsqu'on ne donne pas la latitude du lieu autour duquel l'altération doit être minimum, la valeur du coefficient c reste arbitraire ; en prenant $c = \frac{1}{2}$, on obtient la projection stéréographique méridienne où la moitié seulement du globe est représentée sur le cercle de rayon OP. En prenant $c = \frac{1}{4}$, on peut représenter toute la surface du globe dans une circonférence, parce qu'alors les méridiens se coupent aux pôles sous des angles qui sont la moitié des angles de la sphère. Voici, pour cette valeur $c = \frac{1}{4}$, les valeurs de δ correspondantes aux valeurs de z de 10 en 10 degrés, en supposant $z_0 = 90°$, c'est-à-dire l'équateur situé au milieu de la projection, et $A = 1$.

z	δ	z	δ
90°.	0,00000	40°.	0,24746
80	0,04383	30	0,31783
70	0,08888	20	0,40856
60	0,13648	10	0,54346
50	0,18844	0	1,00000

La projection n° V est construite dans ce système.

Nous donnons encore le tableau des valeurs de δ et de δ' (plus courte et plus grande distance de chaque parallèle au milieu de la ligne des pôles) pour le cas que nous avons considéré au § 4, c'est-

à-dire en supposant que Paris soit le point autour duquel l'altération doive être minimum. Ce tableau suppose $A = 1$.

Colatitude z	δ	δ'	Colatitude z	δ	δ'
10	0,925	1,081	100	0,059	16,700
20	0,835	1,198	110	0,048	20,480
30	0,741	1,348	120	0,163	6,126
40	0,647	1,545	130	0,285	3,512
50	0,552	1,812	140	0,415	2,410
60	0,457	2,186	150	0,553	1,805
70	0,360	2,773	160	0,703	1,421
80	0,263	3,802	170	0,860	1,162
90	0,163	6,071	180	1,000	1,000

CHAPITRE V.

CARTES MARINES DITES CARTES RÉDUITES OU DE MERCATOR (1).

1. L'emploi de la boussole étant en mer le seul moyen de connaître à un instant quelconque la direction, la route suivie, la manière la plus simple de diriger un navire d'un point à un autre est de le maintenir dans le même rumb de vent, c'est-à-dire de lui faire couper dans sa marche tous les méridiens sous le même angle; il en résulte que la courbe décrite à la surface des mers n'est pas un arc de cercle, mais une courbe à double courbure que l'on nomme la *loxodromie.*

L'objet des cartes marines est d'indiquer immédiatement l'angle de route entre deux points donnés.

A cet effet l'équateur étant développé en ligne droite, on représente tous les méridiens par des perpendiculaires à cette ligne et tous les cercles de atitude par d'autres droites parallèles à l'équateur, espacées entre elles d'après cette condition que les angles formés par deux éléments de courbe sur la sphère soient conservés sur la carte. Il est clair que sur une carte ainsi construite la ligne que doit suivre le navire, la loxodromie, devient une droite; il suffit donc de tracer cette droite entre le point de départ et le point d'arrivée, et de lire au moyen d'un rapporteur, l'angle qu'elle fait avec l'un quelconque des méridiens. C'est cet angle, augmenté ou diminué de la déclinaison locale de l'aiguille aimantée, que l'on transporte ensuite à la boussole en agissant sur le gouvernail.

Voyons comment on pourra calculer la distance d'un parallèle quelconque à l'équateur en satisfaisant à la condition énoncée ci-dessus que les angles formés par deux éléments de courbe sur le sphéroïde soient conservés sur la carte.

(1) *Voir* 1re partie, chap. II, § 3, et chap. VI, § 22.

Soit ab (fig. 94) un élément de loxodromie qui coupe les deux méridiens infiniment rapprochés $Pa\alpha$, $Pb\beta$; menons le parallèle ab' du point a. Pour que l'angle abb' soit conservé sur la carte en ABB', il faut que l'on ait

$$\frac{BB'}{bb'} = \frac{AB'}{ab'}.$$

Or puisque les méridiens sont représentés par des droites perpendiculaires à l'équateur OE et équidistantes, l'élément AB' est égal à l'élément correspondant $\alpha\beta$ de l'équateur développé; nommons ds un élément du méridien de la terre, dS l'élément correspondant du méridien de la carte, l la latitude de l'extrémité de l'arc elliptique S dont l'origine est à l'équateur, r le rayon du parallèle dont la latitude est l, a celui de l'équateur, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipse, e le rapport de l'excentricité au demi grand axe $\left(e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$.

L'égalité précédente devient

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\alpha\beta}{ab'} = \frac{a}{r},$$

ou

$$dS = \frac{a(1 - e^2)dl}{\cos l\,(1 - e^2 \sin^2 l)}.$$

Pour avoir la longueur S il suffira d'intégrer le second membre de cette égalité. Multiplions au numérateur e^2 par $\sin^2 l + \cos^2 l = 1$, nous pourrons alors écrire

$$dS = \frac{a\,dl}{\cos l} - a\,dl\,\frac{e^2 \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)};$$

d'où, en prenant les intégrales entre l'équateur et la latitude l,

$$S = a\int_0^l \frac{d(\sin l)}{1 - \sin^2 l} - ae\int_0^l \frac{d(e \sin l)}{1 - e^2 \sin^2 l}.$$

L'intégration donne immédiatement en logarithmes vulgaires

$$S = \frac{a}{M}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin l}{1 - \sin l} - \frac{1}{2}e\log\frac{1 + e\sin l}{1 - e\sin l}\right),$$

formule dans laquelle M, module des logarithmes décimaux, est égal à

$$\frac{1}{\text{log népér. de } 10} = 0{,}4342945.$$

Remplaçant $\frac{1+\sin l}{1-\sin l}\tang^2\left(45^\circ+\frac{l}{2}\right)$ et $\log\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l}$ par son développement en série.

$$2\left(e\sin l+\frac{(e\sin l)^3}{3}+\ldots\ldots\right),$$

$$S=\frac{a}{M}\left[\log\tang\left(45^\circ+\frac{l}{2}\right)-e^2\sin l-\frac{e^4\sin^3 l}{3}\ldots\ldots\right).$$

En exprimant en minutes le rayon a de l'équateur et remplaçant $\frac{10800}{\pi}\frac{1}{M}$ et $\frac{10800}{\pi}$ par leurs valeurs, on obtient définitivement

$$S=7915',704674\log\tang\left(45^\circ+\frac{l}{2}\right)-3437',7\left(e^2\sin l+\frac{e^4\sin^3 l}{3}\right),$$

formule dans laquelle il suffira de tenir compte du terme en e^4 et de négliger les suivants; la distance S sera exprimée en minutes de l'équateur.

Nous reproduisons à la fin de ce chapitre une table de latitudes croissantes calculée par *Rümker* (1) en supposant l'aplatissement $\alpha=\frac{1}{303}=0,00330033$, ce qui donne $e^2=0,0065897$. La même table pourrait encore, sans erreur sensible, servir pour un aplatissement différent, car, si l'on calcule la longitude de l'arc de 82° dans les quatre hypothèses de $\frac{1}{299,15}$, $\frac{1}{303}$, $\frac{1}{305}$, $\frac{1}{321}$, on trouve

pour	$\alpha=\frac{1}{299,15}$	$S=9122',71$
»	$\alpha=\frac{1}{303}$	$S=9122',98$
»	$\alpha=\frac{1}{305}$	$S=9123',12$
»	$\alpha=\frac{1}{321}$	$S=9124',24$

ce qui montre que les deux hypothèses de $\alpha=\frac{1}{299,15}$ et de $\alpha=\frac{1}{303}$ donnent pour cet arc de 82° une différence égale à deux dixièmes de minute environ; de 0 à 45° cette différence n'est que d'un dixième.

(1) *Handbuch der Schiffahrts-Kunde*, von C. Rümker.

Lorsqu'on aura fixé, en millimètres par exemple, la longueur m que doit avoir sur la carte la minute de l'équateur, on aura de suite avec ces tables le facteur par lequel il faut multiplier cette valeur pour obtenir la grandeur de la minute de latitude croissante correspondant à une latitude connue l. Si n et n' sont les nombres de minutes de l'équateur contenues dans des arcs de méridiens de $l^\circ + 10'$ et $l^\circ - 10'$, la longueur de la minute de latitude croissante correspondant à la latitude l sera exprimée par

$$\frac{n'-n}{20} + m.$$

Par exemple à la latitude $l = 49^\circ$ on a

$$\text{pour} \left\{ \begin{array}{ll} l^\circ + 10' = 49^\circ,10' & n' = 3380',1 \\ l^\circ - 10' = 48^\circ,50' & n = 3349',7 \end{array} \right.$$

20 min. de latitude croissante à $49^\circ = n' - n =$ 30',4 de l'équateur.

Par conséquent si l'on prend pour m la valeur $m = 0^m,0271$ (longueur adoptée dans les cartes particulières du *Pilote français*) on aura

$$\left.\begin{array}{r}\text{une minute de latitude croissante} \\ \text{sous le parallèle de } 49^\circ. \ . \ . \ . \end{array}\right\} \frac{30,4 \times 0^m,027}{20} = 0^m,041.$$

La mappemonde n° VIII a été construite dans ce système.

2. Il est maintenant facile de tracer le canevas d'une carte particulière : supposons par exemple une carte s'étendant sur 9° 40' de longitude et depuis 49° 20' jusqu'à 55° de latitude nord. On tirera (fig. 95) une ligne horizontale AB sur laquelle on portera la grandeur choisie pour minute de l'équateur autant de fois qu'il y a de minutes dans 9° 40'. Par les points de division correspondant soit aux degrés, soit au demi-degré, on élèvera des perpendiculaires à la ligne AB ; puis, sur les deux méridiens extrêmes, les deux bords verticaux de la carte, on portera à la suite les uns des autres des nombres de minutes de l'échelle AB donnés par la troisième colonne de la table.

		Différences :
49°,20'	3395',4	
		61',6
50	3457',0	
		94',1
51	3551',1	
		96',2
52	3647',3	
		98',3
53	3745',6	
		100',6
54	3846',2	
		103',1
55	3949',3	

Par les points de division correspondants on mènera des droites parallèles à la droite AB pour représenter les parallèles de degré en degré. Suivant la dimension donnée à la minute de l'équateur, l'importance de la carte, et aussi la latitude extrême à laquelle elle doit s'étendre, il pourra être nécessaire de déterminer par le calcul les parallèles espacés de 30 minutes ou même de 10 minutes ; mais le plus souvent la longueur de 10 minutes de latitude croissante sera partagée en dix parties égales pour achever la graduation des côtés verticaux de la carte, l'erreur commise ainsi étant presque toujours sans influence et même inappréciable.

3. La construction montre que l'échelle varie en chaque point avec la latitude ; les distances se déterminent cependant très-facilement, ainsi que nous allons l'expliquer.

Considérons (fig. 96) deux points A et B de la carte et cherchons leur distance comptée sur l'arc de loxodromie qui les unit. Pour cela traçons cet arc sur la sphère entre les deux points *a* et *b* qui correspondent aux points A et B de la carte, et divisons cet arc en un très-grand nombre d'arcs égaux, puis menons, par les points de division, des méridiens et des parallèles ; nous formerons ainsi une série de petits triangles tels que *bmn* qui sont égaux puisque la ligne *ab* est également inclinée sur tous les méridiens. La somme de leurs côtés dirigés suivant les méridiens est égale à *ab* multiplié par le sinus de cette inclinaison constante ; elle est égale d'autre part à la différence des latitudes de *a* et de *b* multipliée par le rayon de la sphère. De là la solution suivante :

On prend sur l'échelle des parties égales une longueur correspondant à la différence des latitudes des deux points considérés, c'est-à-dire autant de minutes de l'équateur qu'il y a de minutes dans la graduation en latitude de la ligne $\alpha\beta$ déterminée par les parallèles des points A et B. On porte cette longueur sur le méridien du point A en AC′ par exemple, et l'on mène le parallèle du point C′ qui coupe AB en B′ ; la longueur AB′ évaluée en minutes sur l'échelle des parties égales donne en milles la distance cherchée. Pour la réduire en mètres il suffira de la multiplier par $1855^{m},1$ qui est la longueur de la minute de l'équateur.

Toutes les questions de pilotage se ramènent à celle-là. Les marins la simplifient encore le plus ordinairement en mesurant directement sur l'échelle des latitudes croissantes la longueur de la droite AB, admettant ainsi pour un instant que la minute de latitude ne

varie pas du point A au point B. Les deux triangles ABC, AB'C' donnent en effet

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{\text{différence des latitudes croissantes}}{\text{différence des latitudes}};$$

si donc les divisions de l'échelle des latitudes étaient égales, en portant AB sur l'échelle des latitudes on obtiendrait le même nombre qu'en portant AB' sur l'échelle des longitudes. Comme ce nombre, c'est-à-dire la distance en milles des deux lieux A et B, est toujours assez petit, on peut supposer les divisions de l'échelle des latitudes croissantes égales par le travers des deux points A et B. Alors, pour évaluer la distance de A à B, on porte avec le compas cette ligne AB dans la partie de l'échelle latérale qui comprend les parallèles de A et de B, et la différence des graduations lues à chaque pointe du compas donne immédiatement en milles la distance cherchée.

Lorsque la direction donnée AB (fig. 97) se confond avec un parallèle, ou, en d'autres termes, lorsque les lieux A et B ont même latitude, on peut encore employer le moyen abrégé que nous venons d'indiquer. Pour avoir la distance exacte, on mène à l'une des extrémités A une droite AC faisant avec AB un angle égal à la latitnde du lieu A, et l'on abaisse du point B une perpendiculaire BC sur cette ligne; la longueur AC portée sur l'échelle des longitudes donnera le nombre de milles contenus dans AB; c'est ce que l'on nomme le changement en longitude. On a effet $AB=\frac{AC}{\cos l}$, comme sur la sphère.

Nous avons montré précédemment (1) que dans la projection de Mercator le rapport des longueurs élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère, constant autour de chaque point, est exprimé par

$$m=\frac{1}{\cos l},$$

en supposant la terre sphérique; le rapport des surfaces élémentaires qui se correspondent sur la carte et sur la sphère est donc exprimé par

$$m^2=\frac{1}{\cos^2 l}.$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. II, § 3.

L'erreur sur les surfrces croît donc avec l et devient infinie au pôle; mais cette erreur importe peu pour les besoins de la navigation.

TRACÉ DE L'ARC DE GRAND CERCLE SUR LES CARTES RÉDUITES.

4. Nous avons vu que la manière la plus simple de diriger un navire entre deux points donnés par leur latitude et leur longitude est de lui faire suivre l'arc de *loxodromie* qui passe par ces deux points. Cet arc, représenté sur la carte par une ligne droite, n'est pas en réalité le chemin le plus court, car, sur la sphère, le plus court chemin d'un point à un autre est l'arc de grand cercle qui les unit; il faut donc, pour abréger autant que possible une traversée, suivre l'arc de grand cercle, ou du moins des portions successives de loxodromie s'écartant le moins possible de ce cercle.

Sans discuter quels sont les avantages et les difficultés de la navigation *orthodromique*, nous allons donner les moyens de tracer l'arc de grand cercle sur les cartes réduites, en supposant, pour plus de facilité, la terre sphérique.

Il serait facile d'obtenir l'équation de la projection d'un arc de grand cercle; mais comme cette courbe est transcendante, sa construction serait longue et pénible; on se contente donc de déterminer ses points d'intersection avec les méridiens ou les parallèles de la carte en cherchant leurs latitudes et leurs longitudes sphériques, et se servant de ces coordonnées pour les reporter sur la carte réduite; cette méthode est évidemment applicable à tous les systèmes de projection, puisqu'elle est indépendante de la loi de leur tracé; mais ce n'est que sur les projections orthomorphes, comme la projection de Mercator, qu'il est possible de mesurer immédiatement l'angle de route sur chacune des petites droites qui joignent les points d'intersection deux à deux et dont l'ensemble représente, avec une exactitude suffisante, l'arc de grand cercle cherché.

Cette méthode, qui peut donner une exactitude très-grande, devient, en pratique, d'une longueur fastidieuse. Le calcul par lui-même est assez compliqué et ne peut guère être fait d'avance de manière à permettre de tracer l'arc de grand cercle entre le point de départ et le point d'arrivée; car, en navigation, plusieurs causes viennent chaque jour dévier le navire de la route qu'on cherche à lui faire suivre : ces causes sont les courants, les dangers à éviter, les vents favorables dont il peut être avantageux de profiter, etc., etc.

D'un autre côté, les angles que l'on doit reporter chaque jour au compas n'ayant besoin que d'être connus à un quart de degré *au plus*, il devient inutile de recourir au calcul pour obtenir une exactitude plus grande ; les constructions graphiques suffiront donc dans presque tous les cas.

Parmi toutes celles qui ont été proposées, la suivante, très-expéditive, suffira pour déterminer le rumb de vent que doit suivre le navire pour marcher selon l'élément loxodromique tangent au point de départ à l'arc de grand cercle, et pourra être répété en tout point dont on connaîtra la latitude et la longitude, et qui pourra, par conséquent, être pris comme nouveau point de départ.

Considérons dans la sphère (fig. 98) le trièdre ayant pour sommet le centre de la sphère et formé par les méridiens des points de départ et d'arrivée, et le plan du grand cercle considéré. On connaît dans ce trièdre deux angles plans et le dièdre compris, savoir : le complément δ de la latitude du point de départ A, la colatitude δ' du point d'arrivée B, et la différence Δ des longitudes de ces deux points. On cherche l'angle $PAB = \alpha$, c'est-à-dire le dièdre opposé à la face δ'.

Ce problème se résout très-facilement par des considérations élémentaires de géométrie descriptive. Nous nous contenterons d'en indiquer la solution sans en donner la théorie que nos lecteurs trouveront de suite.

Tracez deux droites rectangulaires PO et BA. En un point O de la première, faites avec PO l'angle POB égal à la colatitude δ' du point d'arrivée ; du point P décrivez la demi-circonférence BCB' avec PB pour rayon. Ces premières constructions serviront pour toute la traversée. Faites en P avec PA l'angle APC égal à la différence Δ des longitudes ; abaissez CC' perpendiculaire sur AB ou parallèle à OP, puis C'D perpendiculaire sur la ligne OA construite préalablement en faisant avec PO l'angle POA égal à la colatitude δ du point de départ, c'est-à-dire du point actuel où se trouve le navire. Enfin de C' comme centre décrivez l'arc DE et joignez le point E au point C ; l'angle BEC sera l'angle cherché, l'angle de route initial : il suffira de le nommer avec le rapporteur pour le reporter sur le compas du navire, en agissant sur le gouvernail.

On peut encore déterminer avec une exactitude suffisante les coordonnées géographiques des points d'intersection d'un arc de grand cercle avec des méridiens pris arbitrairement, en construisant un canevas auxiliaire sur lequel on puisse tracer facilement les méridiens

et l'arc de grand cercle dont on pourra ainsi déterminer les intersections; les latitudes et longitudes de ces points seront ensuite reportées sur la carte marine et permettront de tracer l'arc assez exactement par une série de petites droites.

Le canevas qui paraît le mieux convenir pour ce but est celui de la projection centrale où tous les grands cercles sont représentés par des droites. On mènera donc par un point qu'on pourra prendre sur la marge de la carte marine deux droites faisant entre elles un angle égal à la différence des longitudes des deux points de départ et d'arrivée. Dans la projection centrale polaire, les parallèles se représentant par des cercles dont les rayons sont égaux aux cotangentes de leurs latitudes, pour placer les deux points considérés on portera sur les deux droites des longueurs égales aux tangentes des colatitudes de ces points : on tracera avec des longueurs semblables autant de parallèles qu'on le jugera nécessaire, ou bien, par le centre de ce petit canevas, autant de droites inclinées de 5° en 5° ou de 10° en 10° qu'on le voudra, pour représenter les méridiens : les intersections de ces droites et de ces cercles avec la droite joignant les deux points considérés seront autant de points de l'arc de grand cercle qu'il sera très-facile de reporter par leurs latitudes et leurs longitudes sur la carte marine.

On pourrait prendre pour canevas auxiliaire toute autre projection. Le planisphère de M. *Keller*, ingénieur hydrographe, remplit les meilleures conditions pour déterminer l'arc de grand cercle sans nécessiter une nouvelle construction. Cet instrument, composé de deux canevas stéréographiques concentriques dont l'un transparent peut tourner autour du centre, permet de faire passer un arc de grand cercle par deux points quelconques supposés placés sur le canevas fixe et de lire immédiatement les coordonnées des divers points de cet arc.

Nous ne décrirons pas plus longuement cet instrument aussi utile dans la pratique que simple et ingénieux, et nous renverrons, pour plus de détails, à l'instruction qui l'accompagne.

Table pour le calcul des latitudes croissantes.

Aplatissement $\frac{1}{303}$, $S = 7915',701674 \log \text{tang}\left(45° + \frac{l}{2}\right) - 3437,7\left(e^2 \sin l + \frac{e^4 \sin^3 l}{3}\right)$.

Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.
0° 0'	0',0	28° 0'	1740',5	37° 0'	2378',9	46° 0'	3099',2
30	29 8	10	1751 7	10	2391 4	10	3113 5
1 0	59 6	20	1763 0	20	2403 9	20	3128 0
30	89 4	30	1774 4	30	2416 5	30	3142 4
2 0	119 2	40	1785 7	40	2420 0	40	3156 9
30	149 1	50	1797 0	50	2441 6	50	3171 5
3 0	178 9	29 0	1808 4	38 0	2454 2	47 0	3186 1
30	208 7	10	1819 8	10	2466 9	10	3200 7
4 0	238 6	20	1831 2	20	2479 6	20	3215 4
30	268 5	30	1842 6	30	2492 3	30	3230 1
5 0	298 4	40	1854 1	40	2505 0	40	3244 9
30	328 3	50	1865 5	50	2517 8	50.	3259 7
6 0	358 3	30 0	1877 0	39 0	2530 6	48 0	3274 6
30	388 3	10	1888 5	10	2543 4	10	3289 5
7 0	418 3	20	1900 0	20	2556 3	20	3304 5
30	448 3	30	1911 6	30	2569 2	30	3319 5
8 0	478 4	40	1023 1	40	2582 1	40	3334 6
30	508 5	50	1934 7	50	2595 1	50	3349 7
9 0	538 7	31 0	1946 3	40 0	2608 1	49 0	3364 9
30	568 9	10	1957 9	10	2621 1	10	3380 1
10 0	599 1	20	1969 6	20	2634 1	20	3305 4
30	629 4	30	1981 2	30	2647 2	30	3410 7
11 0	659 7	40	1992 9	40	2660 3	40	3426 1
30	690 1	50	2004 6	50	2673 5	50	3441 5
12 0	720 6	32 0	2016 3	41 0	2686 7	50 0	3457 0
30	751 1	10	2028 1	10	2699 9	10	3472 6
13 0	781 7	20	2039 8	20	2713 1	20	3488 2
30	812 3	30	2051 6	30	2726 4	30	3503 8
14 0	843 0	40	2063 4	40	2739 7	40	3519 5
30	873 7	50	2075 3	50	2753 1	50	3535 3
15 0	904 6	33 0	2087 1	42 0	2766 5	51 0	3551 1
30	935 5	10	2099 0	10	2779 9	10	3567 0
16 0	966 5	20	2110 9	20	2793 4	20	3582 9
30	997 5	30	2122 8	30	2806 9	30	3598 9
17 0	1028 6	40	2134 8	40	2820 4	40	3615 0
30	1059 9	50	2146 8	50	2834 0	50	3631 1
18 0	1091 2	34 0	2158 8	43 0	2847 6	52 0	3647 3
30	1122 6	10	2170 8	10	2861 2	10	3663 5
10 0	1154 1	20	2182 8	20	2874 9	20	3678 8
30	1185 7	30	2194 9	30	2888 6	30	3696 1
20 0	1217 4	40	2207 0	40	2902 4	40	3712 6
30	1249 1	50	2219 1	50	2916 2	50	3729 0
21 0	1281 0	35 0	2231 2	44 0	2930 0	53 0	3745 6
30	1313 0	10	2243 4	10	2943 9	10	3762 2
22 0	1345 2	20	2255 6	20	2957 8	20	3778 9
30	1377 4	30	2267 8	30	2971 7	30	3795 6
23 0	1409 7	40	2280 0	40	2985 7	40	3812 4
30	1442 2	50	2292 3	50	2999 8	50	3829 3
24 0	1474 8	36 0	2304 6	45 0	3013 8	54 0	3846 2
30	1507 5	10	2316 9	10	3028 0	10	3863 2
25 0	1540 4	20	2329 3	20	3042 1	20	3880 3
30	1573 4	30	2341 7	30	3056 3	30	3897 5
26 0	1606 5	40	2354 1	40	3070 6	40	3914 7
30	1639 8	50	2366 5	50	3084 8	50	3932 0
27 0	1673 2	37 0	2378 0	46 0	3099 2	55 0	3949 3
30	1706 8						
28 0	1740 5						

Suite de la table pour le calcul des latitudes croissantes.

Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.	Latitudes.	LATITUDES croissantes S.
55° 0'	3049',3	64° 0'	5019',0	73° 0'	6512',7	82° 0'	9122',9
10	3966 8	10	5041 8	10	5547 0	10	9195 5
20	3984 3	20	5064 8	20	6581 7	20	9269 6
30	4001 8	30	5087 9	30	6616 7	30	9345 4
40	4019 5	40	5111 2	40	6652 1	40	9422 9
50	4037 2	50	5134 6	50	6687 8	50	9502 1
56 0	4055 0	65 0	5158 2	74 0	6723 9	83 0	9583 2
10	4072 9	10	5181 9	10	6760 3	10	9666 8
20	4090 9	20	5205 7	20	6797 1	20	9751 3
30	4108 9	30	5229 8	30	6834 8	30	9836 6
40	4127 0	40	5253 9	40	6871 9	40	9928 1
50	4145 2	50	5278 2	50	6909 9	50	10019 9
57 0	4163 5	66 0	5302 7	75 0	6948 4	84 0	10114 8
10	4181 9	10	5327 4	10	6987 2	10	10211 8
20	4200 3	20	5352 2	20	7026 4	20	10311 1
30	4218 9	30	5377 1	30	7066 2	30	10418 9
40	4237 5	40	5402 8	40	7106 3	40	10519 8
50	4256 2	50	5427 6	50	7146 9	50	10629 1
58 0	4275 0	67 0	5453 1	76 0	7188 0	85 0	10741 9
10	4293 9	10	5478 7	10	7229 5	10	10858 6
20	4312 8	20	5504 5	20	7271 6	20	10979 4
30	4331 9	30	5530 6	30	7314 2	30	11104 5
40	4351 1	40	5556 8	40	7357 2	40	11234 4
50	4370 8	50	5583 1	50	7400 9	50	11369 4
59 0	4389 6	68 0	5609 7	77 0	7445 0	86 0	11509 8
10	4409 1	10	5636 5	10	7489 7	10	11656 2
20	4428 6	20	5663 4	20	7535 0	20	11809 2
30	4448 2	30	5690 6	30	7580 0	30	11969 2
40	3467 9	40	5718 0	40	7627 4	40	12137 0
50	4487 7	50	5745 5	50	7674 5	50	12313 5
60 0	4507 7	69 0	5778 3	78 0	7722 8	87 0	12499 4
10	4527 7	10	5801 3	10	7770 7	10	12696 0
20	4547 8	20	5829 5	20	7819 8	20	12904 5
30	4568 0	30	5857 9	30	7869 6	30	13126 4
40	4588 3	40	5886 6	40	7920 1	40	13363 7
50	4608 8	50	5915 4	50	7971 4	50	13618 5
61 0	4629 3	70 0	5944 5	79 0	8023 4	88 0	13893 7
10	4650 0	10	5973 9	10	8076 2	10	14192 9
20	4670 7	20	6003 4	20	8129 8	20	14520 6
30	4691 6	30	6033 2	30	8184 2	30	14882 8
40	4712 6	40	6063 8	40	8230 5	40	15287 7
50	4733 7	50	6093 6	50	8295 7	50	15746 8
62 0	4754 9	71 0	6124 2	80 0	8352 8	89 0	16267 8
10	4776 2	10	6155 0	10	8410 9	10	16903 6
20	4797 7	20	6186 1	20	8469 9	20	17670 7
30	4819 2	30	6217 5	30	8529 0	30	18659 7
40	4840 0	40	6249 1	40	8591 0	40	20053 6
50	4862 7	50	6281 0	50	8653 2	50	22436 5
63 0	4884 7	72 0	6313 2	81 0	8716 6	90 0	Infini.
10	4906 7	10	6345 7	10	8781 1		
29	4928 9	20	6378 5	20	8846 8		
30	4951 2	30	6411 5	30	8913 8		
40	4973 7	40	8444 9	40	8982 2		
50	4996 2	50	6478 6	50	9051 8		
64 0	5019 0	73 0	6512 7	82 0	9122 9		

PROJECTION DES PLANS PROVISOIRES DE CONSTRUCTION. — CARTES PLATES.

3. Pour rapporter sur la carte les différents sommets d'une triangulation, on a coutume de calculer soit leurs coordonnées géographiques, soit leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire passant par l'observatoire principal. La première méthode, qui a été employée au Dépôt de la Guerre pour la construction de la carte de France, est du domaine de la géodésie, nous ne la décrirons pas; nous nous occuperons seulement de la deuxième méthode, qui a été employée par Cassini et qui est encore en usage au Dépôt de la Marine pour dresser les plans de construction, plans sur lesquels on construit tous les détails du levé topographique et hydrographique avant de les rapporter sur les cartes réduites.

Pour déterminer les coordonnées des divers points de la triangulation par rapport à la méridienne et à la perpendiculaire, on suppose rabattus successivement sur l'horizon du lieu pris pour origine les divers triangles du réseau dont ce lieu est un des sommets, et l'on mène par chacun des autres sommets des parallèles à ces droites. On calcule les côtés de l'angle droit des triangles rectangles ainsi formés en fonction de l'azimut de l'hypoténuse qui est le côté de l'un des triangles; ce sont ces côtés de l'angle droit qui prennent le nom de distances à la méridienne et à la perpendiculaire.

Ainsi, si A (fig. 99) est le sommet pris pour l'origine, z l'azimut du premier côté $AB = b$, les coordonnées de B seront

$$y = Bm = b\cos z,$$
$$x = Am = b\sin z.$$

Les coordonnées du sommet suivant C se détermineront en résolvant d'abord le triangle ABC dont la base AB et les trois angles ABC sont connus, ce qui fera connaître les côtés CA, CB; les azimuts BCy', ACy' de ces côtés se déduiront facilement de l'azimut z et des angles du triangle; en effet, on a

$$BCy' = mBC = mBA - CBA = z - B,$$
$$ACy' = 180^\circ - yAC = 180^\circ - (z + A).$$

On aura alors

$$nA = AC\sin y'CA; \qquad nC = AC\cos y'CA.$$

On aurait obtenu également ces coordonnées par la résolution du

triangle BCp, ce qui donnerait d'abord les coordonnées Bp, Cp du point C par rapport au point B, et comme celles du point B sont connues, une addition ou une soustraction ferait connaître les coordonnées de C par rapport à A :

$$nA = mA - Bp; \quad nC = Cp - Bm.$$

On calcule habituellement des deux manières par vérification.

Les coordonnées d'un quatrième point D seront déterminées de la même manière par la résolution du triangle CBD dont la base BC est maintenant connue : les azimuts des côtés DB et DC s'obtiendront encore en combinant par addition et soustraction l'azimut de la base avec les angles adjacents du triangle. On aura ainsi tous les éléments nécessaires pour déterminer les coordonnées par rapport à chacun des points B et C, et par conséquent par rapport à l'origine A, avec vérification du calcul.

Ce travail préliminaire terminé, il est possible de dresser les plans de construction.

Pour cela on partagera une feuille de papier en carreaux par deux systèmes de droites parallèles et équidistantes se coupant perpendiculairement entre eux, de manière à figurer des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire. On prendra l'intersection de deux de ces droites pour origine des coordonnées, et l'on conviendra de la distance qui représente sur le terrain le côté des carrés tracés sur le papier. Il sera alors facile de placer graphiquement dans chaque carré les points qui ont été calculés ; les sommets des triangles ainsi obtenus, le travail topographique se construira facilement.

Il ne restera plus, pour achever la *carte plate* de la localité dont on a levé le plan, qu'à effacer les carreaux tracés sur le papier en ne conservant que les perpendiculaires qui passent par l'origine : l'une représentera le méridien et l'autre le parallèle de ce point.

Comme en réalité, dans les calculs qui précèdent, on remplace par des triangles rectilignes rectangles les triangles sphériques rectangles de la surface du globe, on commet une erreur négligeable aux environs de l'origine des coordonnées, mais qui augmente à mesure que l'on s'en éloigne ; aussi, pour ne pas laisser les erreurs s'accumuler, doit-on changer l'origine des coordonnées dès que la distance entre les points que l'on considère et le point de départ dépasse 70,000 à 80,000 mètres. On prend pour nouvelle origine l'un des points de la grande triangulation, et l'on détermine sa latitude

et sa longitude, non plus à l'aide de ses coordonnées, mais en calculant successivement les positions de tous les points de la triangulation principale jusqu'à ce que l'enchaînement des triangles conduise au point que l'on a choisi.

Soit G la nouvelle origine : ce point est relié au point A de la manière la plus simple par les points B et D de la grande triangulation. On arrivera à connaître sa position géographique en calculant préalablement d'abord celle du point B, puis celle du point D. La latitude et la longitude du point B se déduisent de la latitude l_0 et de la longitude t_0 du point A, de la distance d des deux points A et B et de l'azimut z de AB pris au point A, toutes quantités connues par les formules

$$l = l_0 - (1 + e^2 \cos^2 l_0) u'' \cos z - (1 + e^2 \cos^2 l_0)(u'' \sin z)^2 \operatorname{tang} l_0 \frac{\sin 1''}{2},$$

$$t = t_0 + \frac{u'' \sin z}{\cos l},$$

$$u'' = \frac{d}{\rho' \sin 1''};$$

ρ' étant le rayon de courbure de la perpendiculaire au point A.

La position du point B étant connue, pour passer à celle du point D il ne reste plus qu'un élément à déterminer, c'est l'azimut du côté BA pris au point B. Si cet azimut était connu, comme la station au point B a fait connaître l'angle ABD, on en déduirait l'azimut de BD. Or l'azimut z' de BA est donné par la formule

$$z' = 180° + z - \frac{u'' \sin z}{\cos l} \sin \frac{1}{2}(l + l_0) = 180° + z - (t - t_0) \sin \frac{1}{2}(l + l_0).$$

Le terme $(t - t_0) \sin \frac{1}{2} (l + l_0)$ prend le nom de convergence des méridiens des deux points A et B.

La position du point D se calculera ensuite avec la même facilité, en remplaçant dans les formules précédentes l_0 et t_0 par l et t, qui expriment les coordonnées géographiques de B qui viennent d'être calculées, d par la distance BD, ρ' par ρ'_1, rayon de courbure en B, etc. Enfin on arrivera de même à déterminer la position du point G.

La position de la nouvelle origine étant déterminée en longitude et en latitude, et le gisement *vrai* d'un des côtés de la triangulation qui passe par cette origine étant connu, on pourra calculer, par rapport à ce nouveau point, les distances à la méridienne et à la perpen-

diculaire de tous les points qui sont situés dans un rayon de 80,000 mètres et en déduire ensuite les latitudes et longitudes au moyen des coordonnées prises par rapport aux nouveaux axes.

Il y aura donc autant de séries de calculs et autant de projections qu'il y aura d'origines différentes, et les axes dont on se servira dans deux séries seront inclinés entre eux d'un angle égal à la convergence des méridiens des origines correspondantes.

Lorsque l'origine des coordonnées n'est pas dans le plan particulier de la localité qu'on a construit, les parallèles à la méridienne, qui y sont tracées, n'indiquent pas la direction *nord* et *sud* de son lieu principal. Pour l'obtenir on calculera la convergence des méridiens en ce point; nous avons vu que ce petit angle était égal à la différence des longitudes du point considéré et de l'origine multipliée par le sinus de la demi-somme de leurs latitudes; il devra être porté vers l'est ou vers l'ouest, suivant que le point que l'on considère se trouve à l'ouest ou à l'est de l'origine des axes.

6. Tout ce qui précède se rapporte au tracé d'une carte plate; nous allons voir maintenant comment il faut réunir les divers plans de construction ainsi obtenus pour former une carte réduite dans le cas où la portion de surface terrestre que l'on considère ne peut plus être considérée comme plane.

Supposons que tous ces plans aient été dressés à une même échelle et que, pour la carte réduite, cette échelle doive être conservée; cherchons quelle devra être la grandeur *n* de la minute de longitude ou de l'équateur qui, dans les cartes réduites, est la même sous toutes les latitudes. Si C représente la longueur réelle en mètres des côtés de chaque carré, cette longueur sera représentée à la latitude donnée *l* par l'expression

$$\frac{C.m}{1855{,}1} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{le nombre de minutes de l'équateur que contient} \\ \text{une minute du méridien à la latitude } l, \end{array} \right.$$

qui, égalée à la fraction de mètre K, qui représente le côté de chaque carré, donnera une équation d'où l'on pourra tirer, soit la valeur de *m* quand on connaîtra l'échelle du plan, soit l'échelle du plan à construire quand l'échelle de la carte réduite sera donnée d'avance.

Le nombre de minutes de l'équateur que contient une minute du méridien à la latitude *l* sera donné par la table des latitudes croissantes; si *n* et *n'* représentent dans cette table les nombres

de minutes de l'équateur contenues dans les arcs de méridien $l^{\circ} + 10'$ et $l^{\circ} - 10'$, la valeur de la minute du méridien sera $\frac{n'-n}{20}$.
On aura donc l'équation

$$\frac{Cm}{1855,1}\,\frac{n'-n}{20} = \text{K},$$

pour déterminer m en fonction de K, ou réciproquement.

Dans les cartes particulières du *Pilote français*, on a représenté la minute de l'équateur par $0^{m},0271$, et, dans les plans de construction, chaque côté des carrés représentait 2,000 mètres. A la latitude $l = 49^{\circ}$, on aura donc pour le nombre qui doit exprimer 2,000 mètres à l'échelle de la carte

$$\frac{2000 \,.\, 0^{m},027}{1855} \times \frac{30,41}{20} = 0^{m},044.$$

Lorsqu'on connaîtra la longueur qui devra, sur la carte réduite, représenter une minute de longitude, on tracera la projection, c'est-à-dire les méridiens et les parallèles, suivant les règles de Mercator, et l'on y placera les points principaux de la triangulation au moyen de leurs longitudes et de leurs latitudes; or on ne connaît jusqu'à présent que leurs coordonnées x et y par rapport à la méridienne et à la perpendiculaire d'un point; ces coordonnées serviront à trouver les latitudes et longitudes à l'aide des formules suivantes :

$$l = l_0 \pm \frac{y}{\rho' \sin 1''} - \frac{\sin 1''}{2}\left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right)^2 \operatorname{tang}\left(l_0 \pm \frac{y}{\rho' \sin 1''}\right),$$
$$t = t_0 \pm \left(\frac{x}{\rho' \sin 1''}\right) \frac{1}{\cos l},$$

où l_0 et t_0 sont la latitude et la longitude de l'origine des coordonnées, ρ et ρ' les rayons de courbure de la méridienne et de la perpendiculaire en cette origine.

On calculera aussi les latitudes et les longitudes des intersections des carreaux qui sont tracés sur la feuille de construction, ou, au besoin, d'autres carreaux, si l'on trouve les premiers trop grands ou trop petits. Ce calcul se fait à l'aide des formules précédentes, puisque les coordonnées de ces intersections sont connues ; si, par exem-

ple, le côté de chaque carré est de 2,000 mètres, les coordonnées des intersections seront

x	0000 ;	2000 E ou O;	4000 E ou O;	6000 E ou O;	.....
y	2000 N ou S;	2000 N ou S;	2000 N ou S;	2000 N ou S;	.....
»	4000 N ou S;	4000 ;	4000 ;	4000 ;	.....
»	6000 N ou S;	6000 ;	6000 ;	6000 ;	.....
»	....	....	....	....	.....

Dans les quadrilatères ainsi obtenus, on réduira graphiquement les détails renfermés dans les carrés correspondants du plan.

On se contente ordinairement de ne calculer en latitude et longitude que les intersections distantes de 6,000 mètres les unes des autres dans le cas où les carrés ont 2,000 mètres de côté; puis on partage sur la carte, en trois parties égales, les côtés des quadrilatères correspondants, et l'on mène des droites par les points de division opposés; les positions données par leurs intersections mutuelles ne différeront pas du résultat qu'aurait fourni le calcul si l'échelle de la carte n'est pas plus grande que $\frac{1}{10000}$.

Telles sont les méthodes à suivre pour dresser les cartes hydrographiques; nous renverrons pour plus de détails et pour la démonstration des formules au *Traité de géodésie* de M. *Bégat* (1).

(1) *Traité de géodésie à l'usage des marins*, par M. Bégat, Paris 1839.

CHAPITRE VI.

PROJECTION DE CASSINI (1).

1. La projection imaginée par Cassini et employée par lui pour la grande carte de France est précisément celle que nous avons décrite sous le nom de projection des plans provisoires de construction et qui est employée en hydrographie pour la représentation des ports, des îles de peu d'étendue, etc. Chaque point est déterminé par ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire d'un point central qui, dans la carte de France de Cassini, était l'Observatoire de Paris. Pour pouvoir projeter plus commodément les points trigonométriques très-éloignés de l'origine des coordonnées, on comptait leurs abscisses et leurs ordonnées à partir des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire tracées à 60,000 toises les unes des autres; si donc un lieu était à 148,000 toises à l'est de la méridienne et à 88,600 toises au sud de la perpendiculaire, il suffisait, pour fixer ce lieu sur la carte, de mener vers l'est une parallèle à 28,000 toises de la seconde parallèle à la méridienne, et de tracer au sud une autre parallèle à 28,600 toises de la première parallèle à la perpendiculaire; l'intersection de ces deux droites était la position du lieu proposé.

Cassini ne traçait ni les méridiens ni les parallèles sur sa projection, ce qui dispensait de calculer les coordonnées géographiques des sommets des triangles et réduisait les calculs à ceux de leurs coordonnées rectilignes; nous allons réparer cette omission en cherchant les équations à l'aide desquelles on pourra construire les méridiens et les parallèles.

Nous supposerons d'abord la terre sphérique. Soit O (fig. 100) le point pris pour origine des coordonnées; supposons les longitudes

(1) *Voir* 1re partie, chap. VI, § 24.

comptées à partir du méridien de ce point, ce qui revient à ne considérer que les différences des longitudes des points de la carte et de cette origine O. Soit l_0 la latitude de ce point, soit M un point quelconque dont les coordonnées géographiques sont l et t, et les coordonnées rectilignes

$$y = \mathrm{O'A'} = \mathrm{OA} = l - l_0,$$
$$x = \mathrm{M'A'} = \mathrm{MA}.$$

Si l'on considère le triangle sphérique rectangle PAM formé par le méridien principal, celui du point M et l'arc de grand cercle MA qui est perpendiculaire à la méridienne, on a

$$\operatorname{tang} x = \cos(l_0 + y) \operatorname{tang} t,$$
$$\sin l = \sin(l_0 + y) \cos x.$$

La première opération est celle du méridien de la projection, la seconde celle des parallèles. Il sera donc facile de construire ces courbes en faisant varier soit l, soit t. Mais dans la pratique, il sera plus commode de déterminer les coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles menés, par exemple, de dix en dix minutes; on se servira pour cela des deux équations

$$\operatorname{cotang}(l_0 + y) = \operatorname{cotang} l \cos t,$$
$$\sin x = \cos l \sin t.$$

On convertira en secondes les arcs qu'on aura obtenus pour x et y, puis on multipliera ces derniers résultats par $a \sin t''$, afin d'avoir leurs valeurs exprimées en mesures linéaires. Si le méridien rectiligne ou l'axe principal de la carte est divisé en secondes, il sera inutile de réduire ces valeurs en mètres; elles seront prises immédiatement sur cet axe ou sur l'échelle divisée de la même manière.

Lorsque le plan se trouve renfermé entre deux méridiens et deux parallèles fort rapprochés, les équations de ces courbes peuvent se présenter sous la forme suivante, vu la petitesse des quantités x et y par rapport au rayon a de la sphère et le peu de différence qu'on suppose exister entre l et l_0 :

$$(y + a \operatorname{tang} l_0)^2 + \frac{2a}{\cos l_0 \operatorname{tang} t} x = a^2(2 + \operatorname{tang}^2 l_0),$$

$$(y - a \operatorname{cotang} l_0)^2 + x^2 = a^2 \operatorname{cotang} l_0 [\operatorname{cotang} l_0 + 4 \sin \tfrac{1}{2}(l - l_0)].$$

On voit alors que les méridiens deviennent des arcs de parabole et les parallèles des arcs de cercle.

DÉTERMINATION DE L'ANGLE FORMÉ PAR DEUX COURBES DE PROJECTION.

2. Désignons par φ l'angle qu'une tangente à un méridien, en un point quelconque M (fig. 101), fait sur la projection avec la ligne des y, et par φ' celui qu'une tangente au parallèle de ce même point fait avec cette même ligne. On aura

$$\tan\varphi = \frac{dx}{dY},$$

en désignant par Y la somme algébrique $y + l_0$, et tirant de l'équation des méridiens la valeur du rapport $\frac{dx}{dY}$, on obtiendra

$$\tan\varphi = -\tan t \cos x \sin l;$$

on aura aussi

$$\tan\varphi = -\frac{\tan t \sin Y}{1 + \cos^2 Y \tan^2 t} = -\sin x \cos x \tan Y.$$

Tirant pareillement de l'équation des parallèles la valeur du rapport $\frac{dx}{dY}$, on aura

$$\tan\varphi' = \frac{1}{\tan Y \tan x}$$

mais, à cause de $\tan x = \cos Y \tan t$, il s'ensuit que

$$\tan\varphi' = \frac{1}{\sin Y \tan t} = \frac{\cos x \cot t}{\sin l}.$$

De cette valeur et de la précédente, il est aisé de conclure que, en général, les méridiens et les parallèles de la carte ne se coupent point à angle droit comme sur la terre, car il faudrait pour cela que l'équation $\tan\varphi \tan\varphi' = 1$ fût satisfaite ; or, au contraire, on a

$$\tan\varphi \tan\varphi' = \cos^2 x;$$

mais ces intersections sont rectangulaires lorsque $x = 0$; donc toutes les projections des parallèles sont perpendiculaires à celles du méridien principal.

Si l'on fait $Y = 90°$, on obtient

$$\varphi = t;$$

on voit donc que les méridiens forment entre eux, sur la carte, les mêmes angles que sur le globe.

Lorsque $x = 90°$, on a aussi nécessairement $t = 90°$ et $l = 0$, alors les valeurs de $\tang \varphi$ et $\tang \varphi'$ deviennent nulles; ce qui montre que la projection de Cassini défigure très-rapidement les surfaces en allant du milieu de la carte vers ses limites orientale et occidentale. Les longueurs ne sont pas altérées avec moins de rapidité, puisque la distance de deux perpendiculaires au méridien principal, au lieu d'être nulle à la longitude de 90° comme sur le globe terrestre, est toujours égale à celle qui les sépare sur ce méridien.

Pour comparer entre eux l'angle PAM et l'angle $m = 90° - \varphi$ que fait un méridien avec la perpendiculaire à la méridienne, remarquons que le triangle sphérique PMA donne

$$\tang M = \frac{\cotang Y}{\sin x},$$

et que, par ce qui précède

$$\tang m = \frac{\cotang Y}{\sin x \cos x} = \frac{\tang M}{\cos x}.$$

On trouve la même relation entre l'angle V formé sur la terre par un parallèle et une perpendiculaire au méridien, et sa projection $v = 90° - \varphi'$:

$$\tang v = \tang x \tang Y = \frac{\tang V}{\cos x};$$

Enfin la même relation a lieu encore entre un angle Ω d'un grand cercle quelconque avec le grand cercle perpendiculaire au méridien et la projection ω de cet angle, c'est-à-dire l'angle de la projection de l'arc de grand cercle considéré et de la perpendiculaire à la méridienne :

$$\tang \omega = \frac{\tang \Omega}{\cos x};$$

donc l'angle qu'une ligne géodésique fait avec une perpendiculaire à la méridienne diffère en général de sa projection, mais l'égalité de ces deux angles a lieu à l'origine A de la perpendiculaire, puisque alors $\cos x = 1$.

3. Il est facile, dans la projection de Cassini, de calculer les rayons de courbure des méridiens et des parallèles, en appliquant la formule générale

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

on trouve pour rayon de courbure des méridiens

$$\rho_m = \frac{a \operatorname{séc} \varphi}{\sin \varphi\,(\operatorname{cotang} Y \cos\varphi + 2 \operatorname{tang} x \sin\varphi)},$$

et pour celui d'un parallèle

$$\rho_p = \frac{a \sin^2 Y \sin^2 x}{\cos^2\varphi' \operatorname{cotang} x\,(\sin^2 x + \cos^2 Y)}.$$

Au point où un méridien coupe l'équateur, on a $Y = 0$ et $\varphi = 0$, circonstance qui rend indéterminée la valeur précédente de ρ_m ; mais on trouve dans ce cas

$$\rho_m = \frac{2a}{\sin 2t}.$$

Quant à la valeur de ρ_p, elle devient infinie à la même latitude $Y = 0$, mais elle se présente aussi sous une forme indéterminée pour tous les points où $x = 0$, c'est-à-dire pour tous ceux où les parallèles de la carte coupent le méridien principal entre l'équateur et le pôle. Cependant on a alors

$$\rho_p = \frac{a}{\operatorname{tang} Y} = \frac{a}{\operatorname{tang} l}.$$

Les rayons ρ_m et ρ_p permettent de rectifier facilement un arc de méridien ou un arc de parallèle. Supposons que, pour l'ordonnée $Y + 1$, l'abscisse x devienne x_1, et que φ se change en φ_1 ; alors l'amplitude de l'arc de méridien à rectifier et commençant à l'extrémité de l'abscisse x sera

$$(90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi = u,$$

et cet arc $\Delta\mu$ aura pour longueur

$$\Delta\mu = \frac{\pi}{180}\,\rho_m u.$$

Même observation pour la rectification d'un arc de parallèle et pour celle de la projection d'un arc de plus courte distance quelconque.

Dans la projection de Cassini, les surfaces de la carte ne sont pas égales à celles qui leur correspondent sur la sphère; mais lorsque les abscisses x et x' des extrémités de la projection de l'arc de méridien qui les limitent sont très-petites et très-peu distantes entre elles, ces surfaces sont peu différentes.

Nous n'étudierons pas la question de la quadrature des surfaces sur cette projection, et nous renvoyons à la *Topographie* de Puissant, que nous avons déjà citée.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte de l'aplatissement de la terre, dont la considération rendrait toutes ces questions beaucoup plus difficiles à résoudre. Puissant a refait les calculs dans cette hypothèse; mais comme la projection de Cassini ne doit être employée que pour les cartes particulières d'une petite étendue, il sera toujours suffisamment exact, dans les limites où cette projection jouit de tous ses avantages, d'appliquer la méthode de Prony (1), qui consiste à chercher le rayon de la sphère dont la surface s'écarte le moins possible de celle de la terre dans le lieu représenté par la carte. En prenant pour rayon la racine carrée du produit des rayons de plus grande et de plus petite courbe, au lieu pris pour centre, on ne commettra qu'une erreur qui sera le plus souvent négligeable.

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 4.

CHAPITRE VII.

1° PROJECTION DITE DE BONNE OU DU DÉPOT DE LA GUERRE (1).

1. Nous avons vu précédemment que cette projection, qui possède la propriété de représenter les surfaces en véritable grandeur, se traçait de la manière suivante.

Sur une droite OA′ (fig. 102) on porte à partir d'un point C choisi pour centre de la carte et auquel on assigne d'avance une latitude l_1, les longueurs des arcs de méridien calculées d'après la formule (2)

$$S = a(1-e^2)[A(l-l_1) - B\sin(l-l_1)\cos(l+l_1) + \tfrac{1}{2}C\sin 2(l-l_1)\cos 2(l+l_1)].$$

et réunies dans la table I. Puis d'un centre commun O situé à une distance de C égale à la cotangente de la latitude l_1 calculée sur l'ellipsoïde, c'est-à-dire à

$$\rho_1 = N_1 \operatorname{cotang} l_1 = \frac{a \operatorname{cotang} l_1}{(1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}},$$

formule dans laquelle N_1 représente la grande normale au point C, on décrit des arcs de cercle passant par chacun des points de division de la droite OA′ ; ces arcs représentent les parallèles.

On porte ensuite sur chacun d'eux, à partir de la droite OA′ qui représentera le méridien du milieu pris pour premier méridien, les longueurs respectives des degrés de chaque parallèle, calculées par la formule

$$d = \frac{2\pi}{360} N \cos l = \frac{\pi a \cos l}{180(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}},$$

et réunies dans la table I, et l'on fait passer des courbes par les

(1) *Voir* 1re partie, chap. III, § 12, et chap. VI, § 14.
(2) *Voir* 1re partie, chap. I, § 3.

points correspondants de chaque parallèle; ces courbes représentent les méridiens; elles tournent leur concavité vers le méridien du milieu seul figuré par une droite. La projection n° XVII représente l'hémisphère nord.

Pour éviter les petites erreurs dues à ce que, en portant bout à bout les longueurs des arcs de 1°, on regarderait chacun de ces arcs comme égal à sa corde, il convient de calculer l'amplitude de chaque parallèle correspondant à une longitude totale $2t$.

Soit 2θ l'angle, au centre commun O (fig. 103), sous-tendu par cet arc de parallèle à la latitude l. Sur l'ellipsoïde, l'arc représenté par A'M est exprimé par

$$\frac{2\pi}{360} t \mathrm{N} \cos l,$$

et, sur la carte, l'arc A'M a pour valeur

$$\frac{2\pi}{360} \rho\theta.$$

En égalant ces deux expressions on obtient la valeur de θ

$$\theta = \frac{\mathrm{N}t}{\rho} \cos l,$$

formule dans laquelle on devra remplacer ρ par

$$\rho = \mathrm{OA'} = \mathrm{OC} - \mathrm{A'C} = \rho_1 \pm \mathrm{S} = \mathrm{N}_1 \operatorname{cotang} l_1 \pm \mathrm{S},$$

le signe + correspondant au cas où la latitude l est moindre que l_1, et le signe — au cas contraire.

Les valeurs de ρ_1, c'est-à-dire des cotangentes aux diverses latitudes, ont été calculées et réunies dans la table I ainsi que les valeurs de la grande normale; il sera donc très-facile d'obtenir ρ et par suite θ. On n'aura plus alors qu'à partager chaque arc A'M en un nombre t de parties égales pour obtenir les points d'intersection avec les méridiens de degré en degré.

2. Dans la plupart des cartes que l'on a à construire, le centre O sort des limites de la feuille et il est impossible de décrire les parallèles d'un mouvement continu; on calcule alors les coordonnées de leurs intersections avec les méridiens en les rapportant à deux axes rectangulaires qui sont le méridien moyen et la tangente au parallèle moyen.

Les formules sont évidemment

$$x = MQ = CP = \rho \sin\theta,$$
$$y = A_1Q = \rho_1 - \rho\cos\theta,$$

ou

$$x = \rho\sin\theta,$$
$$y = S + x \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

Il faudra donc, après avoir tracé deux droites perpendiculaires OC et Cx passant par le milieu de la feuille, porter sur la première, comme nous l'avons indiqué, les longueurs des arcs de méridien répondant à 1°, 2°, 3° de distance au point C, puis calculer les rayons ρ des parallèles projetés par la simple formule

$$\rho = \rho_1 \pm S,$$

et les amplitudes θ qui répondent à des valeurs de l et de t variant aussi par degrés, à l'aide de la formule

$$\theta = \frac{Nt}{\rho}\cos l;$$

on pourra alors déterminer les valeurs correspondantes des coordonnées x et y qui fixent la position de chaque sommet des quadrilatères de la projection, c'est-à-dire les points d'intersection des divers méridiens et parallèles.

Des tables étendues ont été calculées par *Plessis* et servent de base aux constructions des cartes du Dépôt de la guerre (1). Comme l'aplatissement y est supposé de $\frac{1}{334}$, elles ont été corrigées depuis dans l'hypothèse de l'aplatissement $\frac{1}{308}$, mais ces nouvelles tables, en usage aujourd'hui au Dépôt de la guerre, sont restées manuscrites et n'ont pas été publiées ; elles supposent comme les précédentes la division centésimale du cercle ; toutes les constructions des feuilles dont l'ensemble compose la carte de France se font donc dans cette hypothèse, et la division en degrés, minutes et secondes sexagésimales ne se retrouve que sur le cadre de chaque feuille à côté de la division centésimale.

(1) *Voir* ces tables à la fin de la topographie de Puissant. La circonférence vaut alors 400 grades, le grade 100 minutes, la minute 100 secondes.

Il est facile de faire servir aux calculs en degrés et fraction les tables calculées en grades en se rappelant que pour convertir

un nombre de degrés en grades il faut le multiplier par $\frac{10}{9}$,

» de minutes de degrés en minutes de grades, par $\frac{10}{6}$,

» de secondes de degrés en secondes de grades par $\frac{10}{6}$.

En cherchant les coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles, nous avons résolu le problème de

« Trouver sur la carte les coordonnées rectangulaires d'un point du sphéroïde donné par sa latitude et sa longitude. »

3. Nous allons maintenant résoudre la question inverse :

« Déterminer la latitude et la longitude d'un point de la carte dont on connaît les coordonnées rectangulaires x, y. »

Supposons d'abord la terre sphérique; changeons l'origine des coordonnées et transportons-la au centre commun O des parallèles ; les nouvelles coordonnées auront avec les précédentes les relations

$$X = x; \quad Y = \rho_1 - y = a \operatorname{cotang} l_1 - y.$$

On aura alors

$$\rho = \frac{Y}{\cos\theta} = \frac{X}{\sin\theta},$$

et l'angle θ se déterminera par la relation

$$\operatorname{tang} \quad = \frac{X}{Y}.$$

On pourra donc déterminer le rayon ρ du parallèle du point donné. On aura ensuite

$$S = a \operatorname{cotang} l_1 - \frac{Y}{\sin\theta};$$

la valeur de S convertie en degrés et fraction fera connaître la différence des latitudes du parallèle moyen et de celui sur lequel se trouve le point considéré, et par suite la latitude de ce point.

Enfin, tirant la valeur de t de la relation

$$\theta = \frac{t a \cos l}{a \operatorname{cotang} l_1 - S},$$

nous aurons la longitude cherchée t par la formule

$$t = \theta \frac{a \operatorname{cotang} l_1 - S}{a \cos l};$$

où tout est connu dans le second membre.

En tenant compte de l'aplatissement de la terre, les calculs seraient plus compliqués, mais on arriverait encore à déterminer l et t. Mais, pour les besoins ordinaires de la géographie, il sera suffisamment exact d'employer la méthode générale que nous avons donnée (1) et qui suppose seulement que le quadrilatère formé par les deux méridiens et les deux parallèles qui comprennent le point donné, peut être, sans erreur sensible, assimilé à un quadrilatère rectiligne.

La même hypothèse permettra, dans les cartes dont les méridiens et les parallèles seront tracés de 10 en 10 minutes par exemple, de placer graphiquement, à l'aide de leur latitude et de leur longitude, les points qui tombent dans l'un des quadrilatères dont les sommets ont été déterminés, et de projeter les sommets d'une triangulation secondaire dont on n'aura pas calculé les coordonnées géographiques.

ÉTUDE DE L'ALTÉRATION DES ANGLES OU CALCUL DE LA PROJECTION D'UN ANGLE DONNÉ.

4. Nous allons maintenant nous proposer d'évaluer, en un point quelconque M de la projection de Bonne, l'altération produite sur les angles (fig. 104).

Cherchons d'abord de combien les angles sous lesquels les méridiens coupent les parallèles diffèrent d'un angle droit, c'est-à-dire de 90°.

Cette différence φ est égale à l'angle de la tangente en M à la courbe qui représente le méridien avec le rayon $OM = \rho$ du parallèle, et l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle φ est, en général,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\rho d\theta}{d\rho},$$

et comme $\rho = \rho_1 \pm S$, il s'ensuit que

$$d\rho = \pm dS;$$

(1) *Voir* 1re partie, chap. I, § 5.

donc

$$\tang \varphi = \frac{\rho d\theta}{dS};$$

or

$$\rho\theta = Nt \cos l = \frac{at \cos l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}.$$

En différentiant cette équation il vient

$$\rho d\theta + \theta d\rho = \frac{at \sin l (1 - e^2) dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \rho d\theta + \theta dS;$$

or la géodésie donne la formule

$$dS = \frac{a(1 - e^2) dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

on peut donc écrire

$$\frac{\rho d\theta}{dS} + \theta = t \sin l,$$

et par conséquent

$$\tang \varphi = t \sin l - \theta.$$

pour le calcul on devra multiplier le second membre par $\frac{\pi}{180}$ et écrire.

$$\tang \varphi = \frac{\pi}{180}(t \sin l - \theta).$$

Il est facile de prouver que l'angle φ est nul pour les points du parallèle moyen d'une carte quelconque ; en effet, lorsque $l = l_1$, on a

$$\theta = \frac{at \cos l_1}{\rho_1 (1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \rho_1 = \frac{a \cotang l_1}{(1 - e^2 \sin^2 l_1)^{\frac{1}{2}}};$$

par conséquent

$$\theta = \frac{t \cos l_1}{\cotang l_1} = t \sin l_1,$$

donc

$$\tang \varphi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = 0.$$

Il est en outre facile d'assigner le signe de φ pour les régions boréale et australe dont le parallèle moyen forme la limite commune ; car lorsque $l = 0$, on a

$$\tang \varphi = -\frac{\pi\theta}{180}.$$

φ est donc négatif; ainsi, dans toute l'étendue de la région australe, c'est-à-dire pour les latitudes inférieures à l_1, l'angle HMT $= (90° - \varphi)$ est plus grand que 90°; dans celle du nord, au contraire, cet angle est plus petit.

Si nous n'avions pas tenu compte de l'aplatissement de la terre, nous aurions trouvé

$$\operatorname{tang}\varphi = t\sin l - \frac{t\cos l}{\operatorname{cotang} l_1 - (l - l_1)},$$

expression qui converge vers zéro à mesure que $l - l_1$ diminue, et qui reste toujours très-petite tant que t et $l - l_1$ ne dépassent pas 7 à 8° comme cela a lieu pour la carte de France dont le parallèle moyen est celui de 45° de latitude et le méridien moyen celui de l'Observatoire de Paris; aux extrémités de cette carte l'angle φ n'atteint pas 18'.

Arrivons maintenant à la question générale et cherchons la projection a (fig. 105) d'un angle A formé sur le sphéroïde par un méridien AA' et une direction quelconque AB qui est projetée en ab. Considérons les deux parallèles infiniment voisins AM, A'M' projetés en am, $a'm'$; ils déterminent sur le sphéroïde un triangle infiniment petit rectangle en A' qui donne

$$\operatorname{tang} A = \frac{A'B}{AA'}.$$

D'après le tracé de la projection, l'arc $a'b$ est égal à A'B et les deux triangles $aa'd$, adb formés par le rayon oa du parallèle de a sont rectangles en d; de plus $ad = AA' = d\rho$. Ainsi

$$\text{angle } a'ab = a = a'ad + dab,$$

et

$$A'B = a'd + db;$$

par suite

$$\operatorname{tang} A = \frac{a'd}{d\rho} + \frac{db}{d\rho};$$

or nous avons montré précédemment que

$$\frac{a'd}{d\rho} = \operatorname{tang}\varphi,$$

l'angle φ étant donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = (t\sin l - \theta)\frac{\pi}{180},$$

et

$$\text{tang}\, bad = \text{tang}(a - \varphi) = \frac{db}{d\rho},$$

donc

$$\text{tang}\, A = \text{tang}\,(a - \varphi) + \text{tang}\,\varphi,$$

et enfin

$$\text{tang}\,(a - \varphi) = \text{tang}\, A - \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin(A - \varphi)}{\cos A \cos \varphi}.$$

Il est donc facile de calculer l'angle a projection de A.

Lorsque l'angle φ est fort petit, comme cela a lieu, même aux limites de la carte de France, l'angle A et sa projection a diffèrent fort peu l'un de l'autre.

ALTÉRATION DES LONGUEURS.

5. Si l'on cherche l'expression de la différentielle d'un arc Σ du méridien dont la longitude est t, on trouve, à l'aide de la formule générale,

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$d\Sigma = d\rho \sqrt{1 + \left(\frac{\rho d\theta}{d\rho}\right)^2} = d\rho\sqrt{1 + \text{tang}^2\varphi} = \frac{d\rho}{\cos\varphi},$$

et puisque $d\rho = dS$, on a

$$d\Sigma = \frac{dS}{\cos\varphi}.$$

Cette équation montre que, si l'angle φ était invariable, on aurait en intégrant

$$\Sigma = \frac{S}{\cos\varphi},$$

sans constante, puisque Σ et S sont nuls à la fois ; mais cet angle φ variant très-peu d'un point à un autre très-voisin, il s'ensuit que les petits arcs de méridien très-proches les uns des autres conservent sensiblement sur la carte les mêmes rapports que sur le sphéroïde terrestre et y sont à fort peu près rectilignes.

Il résulte de cette égalité approximative des arcs de méridiens et de l'égalité parfaite des arcs de parallèles, que près du centre du développement dans les limites de 7 à 8 degrés de distance, les distances respectives des lieux sont à fort peu près les mêmes sur la carte que sur le sphéroïde. Comme les angles sont aussi fort peu al-

térés, on peut poser en principe que, non loin de l'intersection du méridien et du parallèle moyen, les petites figures formées sur le globe terrestre et leurs projections sont à fort peu près semblables; aussi est-on autorisé, dans de semblables conditions, à figurer le terrain sur les minutes mêmes assujetties à la projection de Bonne, c'est-à-dire à former les cartes particulières par la simple réduction des levés, à l'échelle convenue. « Au surplus, ainsi que le fait re- « marquer Puissant (1), quoique dans la rigueur mathématique cette « projection et l'orthogonale ne puissent jamais coïncider, les er- « reurs commises dans les levés en procédant de la sorte, au lieu de « s'accroître sans cesse, s'arrêtent au contraire à tous les sommets « des triangles qui servent de point de raccordement et qui ont été « projetés exactement sur les minutes. »

2° PROJECTION SINUSOIDALE DE NICOLAS SANSON, DITE DE FLAMSTEED (2).

6. Nous avons dit que cette projection n'était qu'un cas particulier de la projection dite de Bonne; l'équateur est pris pour parallèle moyen de la carte; tous les parallèles sont alors des droites parallèles à l'équateur et conservant les mêmes distances que sur le sphéroïde. On détermine les méridiens en portant sur ces droites les longueurs des arcs de longitude aux latitudes considérées. La table I permettra d'effectuer cette construction avec beaucoup d'exactitude et de rapidité.

Tout ce que nous avons dit de la projection de Bonne peut s'appliquer ici en faisant seulement $l_1 = 0$. Il en résulte que les coordonnées sont exprimées par

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{180}\, ta\cos l \\ y &= \frac{\pi}{180}\, al \end{aligned}\right\} \quad \text{ou par} \quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{180}\,\frac{at\cos l}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \\ y &= \frac{\pi}{180}\,\frac{al(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

L'angle φ que fait un méridien avec la perpendiculaire au paral-

(1) *Traité de topographie*, p. 130.
(2) *Voir* 1re part., chap. III, § 6, et chap. VI, § 15.

lèle, c'est-à-dire le complément de l'angle d'un méridien et d'un parallèle, est exprimé par

$$\tang \varphi = \frac{\pi}{180} (t \sin l).$$

En appelant A l'angle formé sur le sphéroïde par un méridien et une direction quelconque, et a la projection de cet angle, on trouvera encore

$$\tang(a - \varphi) = \tang A - \tang \varphi = \frac{\sin(A - \varphi)}{\cos A \cos \varphi}.$$

Un arc infiniment petit $d\Sigma$ de méridien est exprimé par

$$d\Sigma = \frac{dS}{\cos \varphi},$$

c'est-à-dire, en supposant la terre sphérique, par

$$d\Sigma = a dl \sqrt{1 + t^2 \sin^2 l},$$

et par conséquent

$$\Sigma = a \int dl (1 + t^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}},$$

intégrale qui dépend de la rectification d'un arc d'ellipse dont les demi-axes sont a et $a \sqrt{1 + t^2}$.

Cette projection a, comme la projection de Bonne, l'avantage de conserver les surfaces; mais son emploi doit être beaucoup plus restreint, car l'altération des angles et des arcs de méridien y croît beaucoup plus rapidement à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, seul parallèle coupé à angles droits par les parallèles.

La projection n° XVIII représente la sphère entière développée dans ce système.

3° PROJECTION ÉQUIVALENTE DE WERNER (1).

7. Nous avons dit que cette projection prenait le pôle pour centre commun des parallèles qui ont ainsi pour rayons leurs véritables distances au pôle mesurées sur la sphère, c'est-à-dire les complé-

(1) *Voir* 1re part., chap. III, § 11.

ments des arcs qui mesurent leurs latitudes. On détermine les méridiens en portant sur ces arcs de cercle les longueurs des arcs de longitudes aux latitudes considérées, ou plus exactement en calculant l'angle sous-tendu au pôle par le développement de 90° de longitude et partageant l'arc ainsi obtenu en degrés égaux.

Cet angle est donné par la formule

$$\theta = 57^\circ 2958\, t \frac{\cos l}{l} = 90^\circ . (57,2958) \frac{\cos l}{l}.$$

Voici sa valeur pour les valeurs de l de 90° lat. N. à 90° lat. S.

l	θ	l	θ
90	90° 0′	0	57° 18′
80	89 33	10	50 45
70	88 11	20	44 3
60	85 57	30	37 12
50	82 53	40	30 23
40	79 1	50	23 40
30	74 26	60	17 10
20	69 12	70	11 1
10	63 27	80	5 16
0	57 18	90	0 0

NOTE

SUR LE DÉVELOPPEMENT MODIFIÉ DE FLAMSTEED,

(Projection du Dépot de la guerre),

Par M. A. Tissot (1).

8. « Les angles s'écartant d'autant plus d'être droits que le rectangle correspondant au parallèle considéré est plus éloigné du point de croisement du méridien et du parallèle moyen, cherchons quelle condition doit remplir la position de ce point de croisement pour que les plus grandes altérations d'angles et de distances soient aussi faibles que possible.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 29 mars 1858.

« Soit α la déviation azimutale du parallèle en un point de la carte. Posons $\tang \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \tang \alpha$; on peut démontrer que, en ce point, la plus grande altération d'angle sera égale à β, et que le rapport des longueurs d'un élément de courbe sur la carte et sur le globe y sera représenté par $\tang \left(45^\circ + \frac{\beta}{4}\right)$ ou par $\tang \left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right)$ suivant qu'il s'agira de l'élément qui a subi l'allongement le plus considérable, ou de celui pour lequel la diminution est la plus forte. Quand α décroît, β décroît, et les deux rapports marchent vers l'unité. Il suffira donc, pour remplir les deux conditions énoncées, de rendre aussi faible que possible la plus grande valeur de α.

« On sait que la tangente de cet angle est proportionnelle à la longitude t comptée à partir du méridien moyen et qu'elle augmente en même temps que la différence $l - l_1$ entre la latitude du parallèle moyen et celle du point considéré ; l'augmentation, plus rapide au-dessous de cette ligne qu'au-dessus, s'effectue suivant une loi moins simple que la précédente ; mais il est facile de vérifier que si k représente le cosinus de la latitude du parallèle moyen, on a

$$\alpha = kt(l - l_1)(1 + \varepsilon),$$

ε étant une quantité assez petite composée de plusieurs termes dont les principaux sont dus à l'aplatissement. Par exemple, pour la carte de France et pour celle d'Espagne, ε est plus petit que $\frac{1}{100}$, fraction qu'il est permis de négliger ; il en est de même de la variation qu'éprouve le coefficient k quand on passe du parallèle moyen à un autre peu différent ; donc, pour atténuer le plus possible par le choix du méridien et du parallèle moyen les plus fortes altérations d'angles et de distances, il suffit de rendre minima la plus grande valeur du produit $t\ (l - l_1)$.

« Considérons deux cartes du même pays, l'une dans le système de Bonne, l'autre en représentant les méridiens par des parallèles équidistantes et les parallèles par des droites perpendiculaires aux premières, et formant en un mot le canevas d'une carte plate. L'ensemble des points de la première carte, pour lesquelles on aura la même valeur de α et par conséquent les mêmes altérations d'angles et de distances, formera sur la seconde deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes communes les deux lignes qui figurent le méridien et le parallèle moyen.

« Donc, pour tracer ces deux lignes par la condition énoncée, il faudra opérer ainsi :

« Sur une feuille divisée en carrés de 1 millimètre de côté, on trace les quelques portions du contour du pays où le produit $t\,(l - l_1)$ doit atteindre ses plus grandes valeurs, en adoptant les lignes de division de la feuille pour celles du canevas géographique. On rapporte sur papier transparent un petit nombre d'hyperboles équilatères ayant mêmes asymptotes ; il suffit pour cela d'avoir construit ailleurs la moitié de l'une des quatre branches : supposons ces courbes numérotées dans l'ordre de leurs distances au centre. On fait mouvoir la feuille ainsi obtenue sur la première, en maintenant l'une des asymptotes dans la direction des méridiens et, en observant les numéros des quatre branches qui se trouvent tangentes au contour du pays, on s'arrête à la position dans laquelle le plus élevé de ces quatre numéros a sa valeur la plus petite. Le méridien et le parallèle qu'il convient d'adopter coïncident alors avec les asymptotes.

« A ce même moment les deux plus grands des quatre numéros doivent être égaux entre eux et situés dans des angles opposés ; cette remarque permet d'arriver facilement à la position que l'on cherche.

« Pour tracer les hyperboles remarquons qu'en ayant tracé une il suffit de diviser en un même nombre de parties égales les perpendiculaires abaissées de quelques-uns de ses points sur l'asymptote et de réunir les points de division correspondants. La première branche elle-même peut être remplacée, dans une certaine étendue, par un arc de cercle ayant son centre sur le prolongement de l'arc transverse et un rayon égal à la moitié de cet axe ; l'erreur commise ainsi sur α a pour expression $8 \sin 2\gamma$, γ étant l'amplitude de l'arc à partir du sommet.

« Pour la carte de France, on trouve ainsi un méridien très-peu à l'est de celui de Paris et un parallèle très-peu au-dessus de celui de 46° 30′. Si l'on adopte le méridien de Paris et le parallèle de 46° 30′, la plus grande valeur de α sera moindre que 10′,30″ au N.-E., au N.-O, au S.-E., et que 9′,30″ au S.-O., tandis qu'avec le parallèle de 45° on a, dans la région N.-E., des valeurs de α plus grandes que 18′.

« Pour l'Espagne, le méridien que l'on obtiendrait ainsi serait à environ 45 minutes à l'ouest de celui de Madrid, le parallèle moyen

à 40° 45′ de latitude ; la plus grande valeur correspondante de α serait de 9′,30 ; elle augmente de 1′,30 quand on adopte le méridien de Madrid, en conservant le même parallèle, celui qui serait le plus convenable se trouvant plus au sud de quelques minutes seulement. »

CHAPITRE VIII.

PROJECTION ÉQUIVALENTE DE MOLLWEIDE, DITE HOMALOGRAPHIQUE DE M. BABINET (1).

1. Pour représenter un hémisphère, on décrit une circonférence d'un rayon égal à $a\sqrt{2}$ ($= a.\ 1,41421\ldots$) et dont la surface sera par conséquent égale à la moitié de la surface de la sphère; on trace (fig. 106) deux diamètres perpendiculaires EE', PP' pour représenter l'équateur et le méridien moyen à partir duquel nous supposons que l'on compte les longitudes; on partage le premier en autant de parties égales que l'on veut tracer de méridiens équidistants, soit en 18 si les méridiens doivent être espacés de 10°, et l'on construit des ellipses ayant toutes pour grand axe le diamètre PP' et pour petit axe les parties de EE' telles que Oa, Ob, etc.; les espaces compris entre deux ellipses consécutives seront égaux entre eux et à la moitié du fuseau correspondant sur la sphère. En prolongeant EE' de chaque côté d'une longueur égale au rayon de la carte et construisant des ellipses semblables dont le petit axe sera alors PP', on pourra projeter la sphère entière dans une ellipse dont le grand axe sera double du petit.

On représente ensuite les parallèles par des droites parallèles à l'équateur et dont la distance angulaire NOE $= \varphi$ est donnée en degrés par l'équation suivante :

$$\frac{2\pi}{180}\,\varphi + \sin 2\varphi = \pi \sin l.$$

Disons de suite que la valeur de φ est différente de l, excepté à l'équateur, où ces deux arcs sont nuls ensemble, et aux pôles, où tous deux ont pour valeur absolue $\frac{\pi}{2}$. Le maximum de la différence $l - \varphi$ correspond aux valeurs simultanées de φ et de l qui satisfont à l'équation

$$2 + 2\cos 2\varphi = \pi \cos l.$$

Le calcul démontre que la différence $l - \varphi$ convertie en degrés s'élève au maximum à 10° 30' environ pour une latitude voisine de 65°.

La table de la page suivante, calculée par M. *Jules Bourdin*,

(1) *Voir* 1re partie, chap. III, § 18.

donne les coordonnées rectangulaires $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ de l'extrémité A de chaque parallèle. En supposant le rayon de la carte pris pour unité, il suffira de porter la distance $\sin\varphi$ de O en A sur le méridien moyen, et de mener par le point A une parallèle à EE'.

Si l'on trace d'abord les parallèles il suffira, pour obtenir autant de points des méridiens, de les diviser en autant de parties égales que l'équateur et de faire passer par les points correspondants des courbes qui seront des ellipses.

M. *Catalan* a donné une construction fort ingénieuse de la formule de cette projection; mais l'emploi de la table sera toujours plus simple et plus exact.

Il est inutile, dans le tracé de la mappemonde, de tenir compte de l'aplatissement du globe. Pour les cartes particulières, qui sont de simples extraits de la mappemonde, il suffira, si l'on veut plus de précision, de prendre pour rayon de la sphère une moyenne entre les rayons de plus grande et de plus petite courbure au point central de la carte.

3. Les principaux avantages du système homalographique sont les suivants : les méridiens et les parallèles sont des lignes faciles à tracer, ellipses ou droites, et la direction est-ouest a toujours sur la carte une seule et même orientation. Les inconvénients sont assez nombreux; le plus grave est la déformation des angles et des longueurs. Que l'on observe, par exemple, l'angle formé par un méridien et par un parallèle : cet angle, au lieu d'être droit comme sur la sphère, reçoit sur la mappemonde tous les degrés de grandeur. L'examen d'une mappemonde homalographique montre qu'une même longueur sur la sphère, la distance du pôle au parallèle de 80°, est représentée sur la carte par deux longueurs dans le rapport de 1 à 6 environ. Cette altération porte, il est vrai, sur des régions glaciales qui ont peu d'importance en géographie; mais, au centre même, la longueur qui représente sur le méridien 10° de latitude, au lieu d'être égale à la longueur qui, sur l'équateur, représente 10° de longitude, l'excède du quart environ de la longueur de celle-ci. Le système homalographique a donc l'inconvénient de rétrécir latéralement, et par suite de déformer les contours au centre même de la mappemonde. Nous avons indiqué au § 4 du chapitre VII, 1re partie, un mode de comparaison des projections équivalentes qui permet de juger en particulier le mérite relatif du canevas homalographique; nous ne nous étendrons pas plus longuement sur ce sujet.

La projection n° XVI représente la sphère entière.

TABLE

pour la construction du système homalographique.

$$\pi \sin l = 2\varphi + \sin 2\varphi.$$

VALEURS de l croissant par 1/2 degré	cos φ	sin φ	DIFFÉRENCE sin φ de 1/2 en 1/2 degré.	VALEURS de l croissant par 1/2 degré.	cos φ	sin φ	DIFFÉRENCE sin φ de 1/2 en 1/2 degré.
0° 0′	1,0000000	0,00000000	685431		Report.	0,31865500	662650
0 30	0,9999767	0,00685431	685382	24° 0′	0,9456170	0,32528210	661650
1 0	0,9999060	0,01370813	685331	24 30	0,9433152	0,33189860	660660
1 30	0,9997884	0,02056114	685279	25 0	0,9409646	0,33850520	659630
2 0	0,9996240	0,02741423	685199	25 30	0,9385654	0,34510150	658580
2 30	0,9994127	0,03426622	685088	26 0	0,9361174	0,35168730	657520
3 0	0,9991542	0,04111710	684950	26 30	0,9336210	0,35826250	656430
3 30	0,9988489	0,04796660	684805	27 0	0,9310754	0,36482680	655320
4 0	0,9984967	0,05481465	684650	27 30	0,9284809	0,37138000	654200
4 30	0,9980970	0,06166115	684485	28 0	0,9258374	0,37792200	053040
5 0	0,9976507	0 06850600	084280	28 30	0,9231446	0,38445240	651880
5 30	0,9971572	0,07534880	084070	29 0	0,9204030	0,39097120	650720
6 0	0,9966169	0,08218950	683830	29 30	0,9176119	0,39747840	049540
6 30	0,9960289	0,08902780	683560	30 0	0,9147706	0,40397380	648290
7 0	0,9953942	0,09586340	683270	30 30	0,9118800	0,41045670	647010
7 30	0,9947127	0,10269610	682970	31 0	0,9089400	0,41692680	645720
8 0	0,9939839	0,10952580	682655	31 30	0,9059504	0,42338400	644400
8 30	0,9932080	0,11635235	682330	32 0	0,9029108	0,42982800	643040
9 0	0,9923847	0,12317565	681980	32 30	0,8998216	0,43625840	641670
9 30	0,9915144	0,12999545	681610	33 0	0,8966820	0,44267510	640300
10 0	0,9905970	0,13681155	681195	33 30	0,8934924	0,44907810	638910
10 30	0,9896322	0,14362350	680745	34 0	0,8902524	0,45546720	637520
11 0	0,9886204	0,15043095	680285	34 30	0,8869620	0,46184240	636110
11 30	0,9875614	0,15723380	679810	35 0	0,8836206	0,46820350	634670
12 0	0,9864550	0,16403190	679330	35 30	0,8802282	0,47455020	633220
12 30	0,9853012	0,17082520	678845	36 0	0,8767850	0,48088240	631680
13 0	0,9841004	0,17761365	678345	36 30	0,8732908	0,48719920	630160
13 30	0,9828517	0,18439710	677825	37 0	0,8697454	0,49350080	628590
14 0	0,9815556	0,19117535	677275	37 30	0,8661484	0,49978670	627000
14 30	0,9802124	0,19794810	676690	38 0	0,8625002	0,50605670	625420
15 0	0,9788217	0,20471500	676090	38 30	0,8588002	0,51231090	023760
15 30	0,9773830	0,21147590	675460	39 0	0,8550482	0,51854850	622130
16 0	0,9758970	0,21823050	674795	39 30	0,8512442	0,52476980	620440
16 30	0,9743637	0,22497845	674115	40 0	0,8473879	0,53097420	618740
17 0	0,9727827	0,23171960	673430	40 30	0,8434792	0,53716160	617010
17 30	0,9711537	0,23845390	672730	41 0	0,8395179	0,54333170	615280
18 0	0,9694770	0,24518120	672000	41 30	0,8355020	0,54948450	613510
18 30	0,9677529	0,25190120	671250	42 0	0,8314364	0,55561960	611700
19 0	0,9659809	0,25861370	670470	42 30	0,8273120	0,56173660	609870
19 30	0,9641609	0,26531840	669680	43 0	0,8231420	0,56783530	608020
20 0	0,9622929	0,27201520	668880	43 30	0,8189142	0,57391550	606160
20 30	0,9603770	0,27870400	668030	44 0	0,8146326	0,57997710	604300
21 0	0,9584130	0,28538430	667180	44 30	0,8102966	0,58602010	602360
21 30	0,9564009	0,29205610	666340	45 0	0,8059058	0,59204370	600390
22 0	0,9543409	0,29871950	665440	45 30	0,8014604	0,59804760	598410
22 30	0,9522324	0,30537390	664550	46 0	0,7969604	0,60403170	596360
23 0	0,9500756	0,31201940	663620	46 30	0,7924049	0,60999530	594340
23 30	0,9478704	0,31865560		47 0	0,7877940	0,61593870	

Suite de la table pour la construction du système homalographique.

VALEURS de l croissant par 1/2 degré.	cos φ	sin φ	DIFFÉRENCE sin φ de 1/2 en 1/2 degré.	VALEURS de l croissant par 1/2 degré.	cos φ	sin φ	DIFFÉRENCE sin φ de 1/2 en 1/2 degré.
	Report.	0,61593870	592320		Report.	0,84786820	471840
47 30	0,7831270	0,62186190	590220	69 0	0,5225861	0,85258660	468080
48 0	0,7784035	0,62776410	588130	69 30	0,5148715	0,85726740	464320
48 30	0,7736235	0,63364540	586020	70 0	0,5070603	0,86191060	460420
49 0	0,7687865	0,63950560	583800	70 30	0,4991511	0,86651480	456440
49 30	0,7638925	0,64534360	581600	71 0	0,4911423	0,87107920	452380
50 0	0,7589409	0,65115960	579310	71 30	0,4830311	0,87560300	448160
50 30	0,7539417	0,65695270	577080	72 0	0,4748167	0,88008460	443940
51 0	0,7488643	0,66272350	574850	72 30	0,4664942	0,88452400	439640
51 30	0,7437375	0,66847200	572510	73 0	0,4580613	0,88892040	435260
52 0	0,7385513	0,67419710	570200	73 30	0,4495146	0,89327300	430720
52 30	0,7333054	0,67989910	567830	74 0	0,4408511	0,89758020	426160
53 0	0,7279995	0,68557740	565440	74 30	0,4320659	0,90184180	421440
53 30	0,7226332	0,69123180	562950	75 0	0,4231614	0,90605620	418800
54 0	0,7172058	0,69686130	560450	75 30	0,4141156	0,91022420	412100
54 30	0,7117175	0,70246580	557880	76 0	0,4049354	0,91431520	407080
55 0	0,7061676	0,70804460	555370	76 30	0,3956158	0,91841600	401860
55 30	0,7005550	0,71359830	552820	77 0	0,3861534	0,92243460	396550
56 0	0,6948790	0,71912650	550270	77 30	0,3765409	0,92640010	391140
56 30	0,6891390	0,72462920	547650	78 0	0,3667705	0,93031150	385710
57 0	0,6833342	0,73010570	545000	78 30	0,3568322	0,93416860	380200
57 30	0,6774641	0,73555570	542300	79 0	0,3467146	0,93797060	374350
58 0	0,6715285	0,74097870	539480	79 30	0,3364137	0,94171410	368190
58 30	0,6655270	0,74637350	536670	80 0	0.3259234	0,94539600	361990
59 0	0,6594590	0,75174020	534880	80 30	0,3152285	0,94901590	355430
59 30	0,6533232	0,75707900	530970	81 0	0.3043189	0,95257020	348820
60 0	0,6471191	0,76238870	528080	81 30	0,2921755	0,95605840	342180
60 30	0,6408456	0,76766950	525170	82 0	0,2817763	0,95948020	334980
61 0	0,6345019	0,77292120	522190	82 30	0,2701079	0,96283000	327470
61 30	0,6280869	0,77814310	519140	83 0	0,2581516	0,96610470	319470
62 0	0,6216001	0,78333450	516070	83 30	0,2458837	0,96929940	311150
62 30	0,6150407	0,78849520	512950	84 0	0,2332737	0,97241090	302800
63 0	0,6084076	0,79462470	509820	84 30	0,2022700	0,97543890	293630
63 30	0,6016988	0,79872290	506610	85 0	0,2068365	0,97837520	284000
64 0	0,5949143	0,80378900	503400	85 30	0,1929149	0,98121520	273550
64 30	0,5880519	0,80882300	500120	86 0	0,1784407	0,98395070	261900
65 0	0,5811107	0,81382420	496830	86 30	0,1633412	0,98656970	249500
65 30	0,5740894	0,81879250	493410	87 0	0,1474833	0,98906470	236180
66 0	0,5669870	0,82372660	489940	87 30	0,1306660	0,99142650	220970
66 30	0,5598024	0,82862600	486440	88 0	0,1126372	0,99363620	203020
67 0	0,5525339	0,83349040	482900	88 30	0,0929962	0,99566640	180630
67 30	0,5451794	0,83831940	479300	89 0	0,0710530	0,99747270	152500
68 0	0,5377379	0,84311240	475580	89 30	0 0447615	0,99899770	100230
68 30	0,5302071	0,84786820		90 0	0,0000000	1,00000000	

CHAPITRE IX.

PROJECTION ZÉNITHALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT (1).

1. Nous avons dit que, pour tracer cette projection autour d'un point choisi arbitrairement pour centre, il suffisait de placer chaque point du contour dans l'azimut du point correspondant sur la sphère par rapport au centre adopté et à une distance de ce centre égale à la corde du grand cercle mené du l'un à l'autre de ces deux points.

Prenons d'abord le pôle de la sphère pour centre du tracé. Les parallèles se transforment sur la carte en cercles concentriques, dont chacun a pour rayon la corde de complément de la latitude, soit

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2},$$

en posant $\theta = 90° - l$. Les méridiens sont représentés par des lignes droites passant par le centre commun des parallèles et font entre eux les mêmes angles que sur la sphère.

2. Prenons maintenant le centre de la projection sur l'équateur ; en désignant par θ la distance angulaire de ce centre à un point quelconque de la sphère, par ρ cette distance OM sur la carte (fig. 107), on aura pour ce point

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

En outre, l'angle azimutal z de ce point M, c'est-à-dire l'angle formé par la droite OM avec le méridien du point O, lequel est représenté par une droite et pris pour méridien principal, est le même que sur la sphère.

(1) *Voir* 1re partie, chap. III, § 14.

Nous allons chercher à exprimer z et θ en fonction de la longitude t et de la latitude l du point considéré. Nous avons trouvé que les formules étaient, pour ce cas particulier,

$$\cos\theta = \cos t \cos l, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} z = \sin t \operatorname{cotang} l,$$

et nous avons donné la table IV, qui renferme les valeurs de θ et de z pour les valeurs de t et de l de 10 en 10 degrés. On déduira ensuite chaque valeur de ρ de la valeur correspondante de θ à l'aide de l'équation

$$\rho = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

Rappelons que θ et par suite ρ ne changent pas pour deux points tels que la latitude de l'un soit égale à la longitude de l'autre et réciproquement, parce qu'alors le produit $\cos t \cos l$ reste constant.

Ayant calculé ρ et z, il sera facile de placer le point sur la projection : on mènera par le centre une droite faisant avec le méridien principal un angle égal à z, et l'on portera sur cette droite une longueur OM égale à ρ.

Le tableau suivant renferme les valeurs de ρ correspondantes aux valeurs de z et de θ de la table IV, c'est-à-dire à toutes les valeurs de l et de t de 10 en 10 degrés entre 0 et 90 degrés. Le rayon de la sphère est pris pour unité.

Valeurs du rayon vecteur ρ.

l	$t=0°$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0°	0,00000	0,17432	0,34730	0,51764	0,68404	0,84524	1,00000	1,14716	1,28588	1,41422
10	0,17432	0,24557	0,38622	0,54240	0,700 5	0,85671	1,00756	1,15167	1,28763	1,41422
20	0,34730	0,38622	0,48309	0,61025	0,74854	0,88992	1,02472	1,16499	1,29369	1,41422
30	0,51764	0,54246	0,61025	0,70629	0,82047	0,94163	1,06488	1,18642	1,30355	1,41422
40	0,68404	0,70085	0,74854	0,82047	0,90904	1,00757	1,11083	1,21490	1,31680	1,41422
50	0,84524	0,85671	0,88992	0,94163	1,00757	1,08335	1,16499	1,24913	1,33295	1,41422
60	1,00000	1,00756	1,02472	1,06488	1,11083	1,16499	1,22474	1,28759	1,35142	1,41422
70	1,14716	1.15167	1,16499	1,18642	1,21490	1,24913	1,28759	1,32893	1,37159	1,41422
80	1,28558	1,28763	1,29309	1,30355	1,31680	1,33295	1,35142	1,37159	1,39273	1,41422
90	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422	1,41422

Le méridien central et l'équateur sont divisés de la même manière et le méridien qui limite l'hémisphère est divisé en arcs égaux; les méridiens coupent à angles droits l'équateur, et les parallèles coupent à angles droits le méridien central et celui qui limite la mappemonde.

La projection n° XX a été construite dans ce système.

3. Arrivons maintenant au cas général où la sphère est supposée projetée sur l'horizon d'un point quelconque O dont nous désignerons la latitude par λ et dont nous prendrons le méridien, représenté par une droite, pour méridien principal.

Les formules de transformation de coordonnées qui expriment θ et z en fonction de l et de t sont

$$\cos\theta = \frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda, \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{\sin t}{\sin\theta}\cos l,$$

dans lesquelles l'angle auxiliaire φ est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos t \operatorname{cotang}\lambda.$$

Le rayon ρ de chaque almicantarat, c'est-à-dire la distance du point considéré au centre de la carte, s'exprimera ensuite à l'aide de la formule

$$\rho = 2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

On pourrait aussi employer les formules suivantes

$$\operatorname{tang}\frac{z+M}{2} = \operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,\frac{\cos\frac{l-\lambda}{2}}{\sin\frac{l+\lambda}{2}}; \quad \operatorname{tang}\frac{z-M}{2} = \operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,\frac{\sin\frac{l-\lambda}{2}}{\cos\frac{l+\lambda}{2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\cos l}{\sin z}\sin t = \frac{\cos\lambda}{\sin M}\sin t;$$

les deux premières formules donnent les arcs $\frac{z+M}{2}$ et $\frac{z-M}{2}$ dont la somme est z et la différence M.

Quand on connaîtra z et θ, et par suite ρ, il sera facile de placer le point M en menant par le centre une droite faisant avec le méri-

dien principal l'angle z, et en portant ensuite de O en M la longueur ρ.

L'emploi de l'un quelconque des deux systèmes de formules donne des résultats très-exacts, mais la méthode est assez laborieuse dès qu'on doit calculer les coordonnées d'un grand nombre de points. Nous avons dit (1) que sur toute projection zénithale les méridiens et les parallèles pouvaient se construire par *analogie* lorsqu'on possédait une projection stéréographique ayant pour centre le même point de la sphère que la projection zénithale. Cette construction atteint une grande exactitude pour la projection qui nous occupe. Lorsqu'on aura, en effet, déterminé comme nous l'avons dit la grandeur de l'arc de grand cercle qui unit le point considéré au point central, la longueur de la corde de cet arc, que l'on obtiendra immédiatement sans avoir à s'inquiéter du nombre de degrés et minutes correspondant, sera la longueur que l'on devra porter sur le rayon vecteur préalablement tracé.

On pourrait aussi dresser une échelle numérique en remarquant que si l'on pose dans la figure 41 (2)

$$cK' = a \operatorname{tang} \varphi = \rho_s,$$

on aura

$$\text{corde BK} = \rho_c = 2a \sin \varphi = \frac{2\rho_s}{\sqrt{1 + \rho_s^2}}.$$

Il est très-facile de dresser une table qui donne un certain nombre de valeurs de ρ_c en fonction de ρ_s et qui sera la clef de la transformation ; et il est utile de remarquer que cette transformation est générale, c'est-à-dire qu'elle s'applique à la projection stéréographique sur un horizon quelconque, de sorte que le tracé peut être exécuté au moyen de cette formule ou de cette table en prenant un point quelconque du globe pour centre du tracé. La seule condition nécessaire est que les deux projections aient pour centre les projections d'un même point de la sphère.

(1) *Voir* 1re partie, chap. IV, § 3.
(2) *Voir* page 143.

VALEURS de ρ_s	VALEURS de ρ_e	DIFFÉRENCES des valeurs de ρ_e
0,00	0,000	
0,05	0,100	100
0,10	0,199	99
0,15	0,297	98
0,20	0,392	95
0,25	0,485	93
0,30	0,575	90
0,35	0,661	86
0,40	0,743	82
0,45	0,821	78
0,50	0,894	73
0,55	0,964	70
0,60	1,029	65
0,65	1,090	61
0,70	1,147	57
0,75	1,200	53
0,80	1,249	49
0,85	1,295	46
0,90	1,338	43
0,95	1,378	40
1,00	1,414	36

L'emploi de cette table donne une méthode graphique très-sûre et très-rapide pour la construction de la projection zénithale équivalente. On construira d'abord le réseau des méridiens et des parallèles de la projection stéréographique sur l'horizon du lieu pris pour centre. On divisera ensuite le rayon de la sphère en cent parties égales par exemple, et la table précédente montrera quelle longueur il faudra substituer à chacun des rayons vecteurs de la projection auxiliaire mesurée sur cette échelle pour obtenir les rayons vecteurs correspondants du tracé zénithal.

Si la projection auxiliaire, au lieu d'être stéréographique était orthographique, l'échelle numérique se dresserait à l'aide de la formule

$$\text{corde BK} = \frac{2CK'}{\sqrt{3}}.$$

Quelle que soit la projection auxiliaire que l'on emploiera, on

pourra obtenir non seulement les projections des méridiens et des parallèles à l'aide de leurs intersections, mais encore la projection d'un cercle ou d'une courbe quelconque dont on connaîtra déjà la représentation sur la projection auxiliaire. Il est donc inutile de nous arrêter à chercher l'équation de la projection d'un cercle de la sphère.

La projection n° XXI a été construite dans ce système sur l'horizon de Paris.

Nous avons jusqu'à présent supposé la terre sphérique; cette hypothèse est nécessaire pour l'existence même de toute projection zénithale qui suppose que les almicantarats sont des circonférences sur la surface à représenter; si donc dans le tracé des cartes particulières on veut tenir compte de l'aplatissement aux pôles, on devra appliquer la méthode de Prony qui substitue à la surface de l'ellipsoïde terrestre la portion de surface sphérique qui en diffère le moins possible dans l'étendue de cette surface. Nous avons montré qu'il était le plus souvent suffisant de prendre pour rayon de cette surface sphérique une moyenne, soit géométrique, soit arithmétique, entre les deux rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde au point central, c'est-à-dire entre la grande normale et le rayon de courbure du méridien.

Pour construire l'échelle on calculera, avec le rayon de la sphère que l'on aura adopté, la longueur en mètres de la corde d'un arc de grand cercle correspondant à un angle de 20°, par exemple. La distance de la station centrale à l'almicantarat qui en est écarté de 20° en latitude sera ensuite mesurée sur la carte, suivant le méridien central, avec cette même unité de longueur; le rapport de cette distance à la corde calculée sera le coefficient de la réduction du tracé, et l'unité de longueur devra subir cette même réduction pour être applicable à la carte.

4. Occupons-nous maintenant des altérations inhérentes à ce tracé.

L'altération des angles s'évalue facilement; nous avons vu en effet (1) que si en un point M de la sphère situé à une distance θ du point pris pour centre de projection, on appelle α l'angle d'une direction quelconque avec le grand cercle qui passe par ces deux points, et β l'angle

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, § 11.

correspondant sur la projection, c'est-à-dire l'angle formé par la projection de la direction avec la droite menée au centre de la carte, on a

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\rho d\theta}{\sin\theta d\rho}\operatorname{tang}\alpha = \mathrm{K}\operatorname{tang}\alpha.$$

Dans la projection équivalente de Lambert

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\mathrm{B} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\operatorname{tang}\alpha.$$

L'angle le plus altéré A est exprimé par

$$\operatorname{tang}\mathrm{A} = \pm\cos\frac{\theta}{2},$$

et l'angle correspondant B sur la projection par

$$\operatorname{tang}\mathrm{B} = \pm\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

les signes + et — se correspondant. Il en résulte

$$\operatorname{tang}(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'angle A de déviation maximum est égal à 45° pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au centre de la carte ; il décroît ensuite sur la sphère tandis que l'angle B augmente d'autant sur la carte, et la déviation va en croissant ; à 90° du centre on a

$$\operatorname{tang}\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\mathrm{B} = \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} = 35°15'52'' \quad \text{et} \quad \mathrm{B}-\mathrm{A} = 19°28'16''.$$

La déviation continue à croître avec θ, et à l'antipode du centre, point qui sur la carte se transforme en un cercle, on trouve

$$\mathrm{A} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = 90°.$$

Voici le tableau des angles A et B qui correspondent à la déviation maximum pour des valeurs de θ de 0 à 90 degrés, de 10 en 10 degrés (1).

DISTANCE en degrés au centre de la carte θ.	ANGLE DE DÉVIATION MAXIMUM sur la sphère.	ANGLE DE DÉVIATION MAXIMUM sur la carte.	DÉVIATION MAXIMUM.
0°	45° 0′ 0″,0	45° 0′ 0″,0	0° 0′ 0″,0
10	44 53 26 8	45 6 33 2	0 13 6 4
20	44 33 41 1	45 26 18 9	0 52 37 8
30	43 0 25 3	45 59 34 7	1 59 9 4
40	43 13 9 0	46 46 51 0	3 33 42 0
50	42 11 10 5	47 48 49 5	5 37 39 0
60	40 53 36 2	49 6 23 8	8 12 47 6
70	39 19 21 6	50 40 38 4	11 21 16 8
80	37 27 31 4	52 32 46 6	15 5 33 2
90	35 15 51 8	54 44 8 2	19 28 16 4

Nous avons donné la relation générale qui doit exister entre deux angles α et α_1 sur la sphère pour que les directions définies par ces angles soient des directions conjuguées, c'est-à-dire pour que l'angle des directions correspondantes sur la projection zénithale soit le même que sur la sphère. Cette relation est

$$\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{K} = \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Dans la projection zénithale équivalente elle devient

$$\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Nous renvoyons pour plus de détails au § 12 du chap. V.

5. Occupons-nous maintenant de l'altération des longueurs.

Nous avons trouvé (2), en appelant m le rapport des distances

(1) Ce tableau est extrait du mémoire de M. Collignon.

(2) *Voir* 1re partie, chap. V, § 14.

élémentaires ds et dS correspondantes de la carte et de la sphère, la relation

$$m^2 = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\cos^2\alpha + \rho^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} = \cos^2\alpha\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\alpha\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}};$$

α désignant l'angle de l'élément considéré sur la sphère avec le grand cercle MO qui passe au centre du tracé ; cet angle est exprimé par la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dz}{d\theta}\sin\theta,$$

dans laquelle z désigne l'azimut du sommet de cet angle.

Le rapport m se réduit à l'unité quand $\operatorname{tang}\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ ou quand, sur la carte, $\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$, c'est-à-dire pour la direction qui subit la déviation maximum ; cette direction a donc la propriété de conserver les longueurs.

Par un point M donné on peut donc faire passer sur la carte et sur la sphère deux courbes *isopérimètres* qui se correspondent, coupant tous les arcs MO sur la sphère, tous les rayons MO sur la carte, sous certains angles α et β, de manière que ces courbes aient les mêmes longueurs entre deux points se correspondant chacun à chacun.

Pour les petites valeurs de θ l'angle α que fait la courbe avec l'arc MO est très-voisin de 45° ; cet angle décroît à mesure que θ augmente et est nul pour $\theta = 180°$ ou pour les antipodes du point O. Autour du point O la courbe sur la sphère se rapproche indéfiniment de la spirale logarithmique qui coupe à 45° tous ses rayons vecteurs ; la courbe passe par les antipodes du point o et revient ensuite tourner autour du point O lui-même.

Sur la carte la courbe isopérimètre se rapproche indéfiniment, pour les valeurs très-petites et décroissantes de θ, de la spirale logarithmique qui coupe à 45° ses rayons vecteurs. Pour les valeurs de θ croissantes l'angle β s'accroît et a pour limite 90° lorsque $\theta = 180°$; la courbe touche alors le cercle dans lequel se transforment les antipodes du centre, et se prolonge au delà par une branche indéfinie symétrique de la première.

Pour avoir l'équation de cette courbe en coordonnées polaires, appelons ρ le rayon vecteur OM (fig. 108) et ω l'angle polaire formé par ce rayon avec un axe fixe Ox; nous aurons

$$\frac{\rho d\omega}{d\rho} = \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}};$$

or

$$\rho = 2a \sin\frac{\theta}{2},$$

donc

$$d\rho = a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

et, en substituant,

$$d\omega = \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{d\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

L'intégration donne

$$\omega = \log\text{nép.}\operatorname{tang}\frac{\theta}{4} + C,$$

ou, en logarithmes décimaux,

$$\omega = \frac{1}{M\sin 1''}\log\operatorname{tang}\frac{\theta}{4} + C,$$

$M = 0{,}4342945$, et l'angle ω est ainsi exprimé en secondes.

Cette dernière équation, jointe à

$$\rho = 2a\sin\frac{\theta}{2},$$

est, en termes finis, l'équation du lieu.

Pour $\theta = 180°$, on a

$$\omega = C \quad \text{et} \quad \rho = 2a.$$

Pour construire le patron de la courbe, il est commode de faire $C = \pi$; on trouve alors le tableau suivant :

Valeurs de ω.	Valeurs correspondantes de θ.	Valeurs correspondantes de $\frac{\rho}{a}$.
0°	9° 54'	0,17258
45	21 40	0,37590
90	46 56	0,79644
135	98 00	1,50942
180	180 00	2,00000

Il est inutile de s'occuper de la portion de courbe que donneraient les arcs négatifs, puisque cette portion est située dans une région où la déformation est presque nulle. Les arcs de π à 2π donneraient une branche symétrique de celle qu'on vient de calculer, par rapport au rayon correspondant à $\theta = \pi$.

Revenons maintenant à l'étude de l'altération des longueurs. Si l'on appelle m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$ les rapports des longueurs élémentaires de la carte et de la sphère sur les rayons vecteurs et sur les almicantarats, on trouve que le premier est minimum et que le second est maximum ; leurs valeurs sont

$$m_0 = \cos\frac{\theta}{2}; \qquad m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi les longueurs des éléments des rayons vecteurs sont *réduites* sur la carte dans le rapport de $\cos\frac{\theta}{2}$ à l'unité, et les longueurs des éléments des almicantarats sont *augmentées* dans le même rapport; cette réciprocité est nécessaire pour conservation des surfaces.

Le tableau suivant, calculé par M. Collignon, donne les coefficients d'altération de l'élément de longueur dans le sens du rayon vecteur et dans le sens perpendiculaire, c'est-à-dire m_0 et $m_{\frac{\pi}{2}}$; il contient aussi la comparaison des distances d'un point quelconque au centre du tracé, mesurées sur la sphère de rayon égal à *un* et sur la carte.

DISTANCES en degrés au centre du tracé.	DISTANCES en parties du rayon sur la sphère.	DISTANCES sur la carte.	m_0	$m_{\frac{\pi}{2}}$
10°	0,174533	0,17432	0,99619	1,00382
20	0,349066	0,34730	0,98481	1,01542
30	0,523599	0,51764	0,96593	1,03527
40	0,698132	0,68404	0,93969	1,06417
50	0,872665	0,84524	0,90631	1,10338
60	1,047198	1,00000	0,86603	1,15470
70	1,221731	1,14716	0,81915	1,22077
80	1,396264	1,28558	0,76604	1,30541
90	1,570790	1,41422	0,70711	1,41422

Il est facile de construire graphiquement une échelle applicable à la mesure exacte des distances comptées le long d'un almicantarat, c'est-à-dire le long d'un cercle de la carte ayant pour centre le centre du tracé.

Sur la moitié OAO' (fig. 109) d'un grand cercle de la sphère, portons de O en M le rayon de ce cercle; joignons O'M. Sur le diamètre OO', prenons une longueur OB égale à l'unité adoptée pour la mesure, puis élevons BC perpendiculaire sur OO'; la longueur O'C sera l'unité applicable au cercle décrit avec le rayon OM, car on voit facilement que

$$O'C = \frac{O'B}{\cos OO'M} = \frac{O'C}{\cos\frac{\theta}{2}};$$

l'unité de longueur est donc augmentée dans le même rapport que les éléments de longueur à mesurer sur le cercle de la carte.

En abaissant BD perpendiculaire sur O'M, on voit de même que O'D est l'unité applicable aux éléments de la carte qui aboutissent au point M dans le sens du rayon vecteur.

S'il s'agit de choisir une échelle moyenne applicable, abstraction faite des altérations, à toutes les mesures à prendre sur la carte, on n'a qu'à prendre l'échelle exacte qui convient pour le centre du tracé : les divisions de cette échelle sont partout moyennes proportionnelles entre les divisions applicables aux distances les plus altérées dans un sens et dans l'autre.

CHAPITRE X.

PROJECTIONS CYLINDRIQUES ÉQUIVALENTS DE LAMBERT.

1° PROJECTION DROITE OU NORMALE.

1. Ce système est des plus faciles à construire. Il suffit de porter, à partir d'une droite représentant l'équateur et sur une perpendiculaire à cette ligne, des longueurs égales aux sinus des latitudes et de mener par les points ainsi obtenus des parallèles à l'équateur. On représente ensuite les méridiens par des perpendiculaires à l'équateur distantes les unes des autres des longueurs des degrés de la circonférence qui a servi à mesurer les sinus.

La table II, calculée en prenant le rayon de la terre pour unité, donnera de suite la distance de chaque parallèle à la droite qui représente le pôle, ou, si l'on veut, la véritable distance à l'équateur, à la condition de remplacer la latitude considérée par son complément $90° - l$. Ainsi $\sin 48° = \cos(90° - 48°) = \cos 42° = 0{,}74314$.

La projection n° X représente la sphère entière.

Si l'on voulait tenir compte de l'aplatissement de la terre, la formule qui exprimerait la distance de chaque parallèle à l'équateur serait

$$y = a \sin l - ae^2 \sin l \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 l\right).$$

2. Il est facile de déterminer, pour ce tracé, les altérations d'angles et de longueurs en chaque point. Supposons la terre sphérique et considérons sur la sphère une direction quelconque faisant un angle α avec un méridien ; l'angle β que fera avec le méridien de la projection la direction qui, sur la carte, correspond à la direction considérée sur la sphère, sera donné par la formule

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha \frac{1}{\cos^2 l}.$$

Cette relation permet de tracer la rose des vents en un point quelconque de la carte

Remarquons que $\beta = \alpha$ pour $\alpha = o$ et pour $\alpha = 90°$ que nous savions déjà, puisque les méridiens et les parallèles se coupent à angles droits sur la carte comme sur la sphère.

L'altération maximum correspond en chaque point à

$$\tang A = \pm \cos l,$$

ou à

$$\tang B = \pm \frac{1}{\cos l},$$

les signes se correspondant ; cette altération est exprimée par

$$\tang (B - A) = \frac{\sin^2 l}{2 \cos l}.$$

On voit que l'altération, nulle au centre, croît rapidement avec la latitude et qu'elle est de 90° aux pôles.

En chaque point, il existe une infinité de groupes de deux directions *conjuguées*, c'est-à-dire faisant entre elles le même angle sur la carte ou sur la sphère ; ces directions sont définies, sur la sphère, par la relation

$$\tang \alpha_1 \ \tang \alpha = \cos^2 l,$$

et sur la carte, par la relation

$$\tang \beta_1 \ \tang \beta = \frac{1}{\cos^2 l}.$$

Les éléments du méridien sont réduits sur la carte dans le rapport de cos l à l'unité ; les éléments du parallèle sont augmentés dans le même rapport, et en chaque point passe une courbe isopérimètre, c'est-à-dire ayant les mêmes longueurs que la courbe correspondante de la sphère entre deux points se correspondant chacun à chacun : cette courbe est définie par les angles α ou β, qui satisfont aux équations

$$\tang \alpha = \pm \cos l$$

sur la sphère, et

$$\tang \beta = \pm \frac{1}{\cos l},$$

sur la carte. L'équation différentielle de la courbe isopérimètre est

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}},$$

et conduit à l'équation d'une double sinusoïde

$$y=\pm a \sin \frac{x-c}{a}.$$

Enfin, les altérations, de quelque nature qu'elles soient, restent les mêmes sur un même parallèle, c'est-à-dire ne dépendent nullement de la longitude.

Cette propriété rend la projection cylindrique équivalente droite propre à représenter des pays aussi étendus que l'on veut en longitude, mais peu étendus en latitude.

M. Collignon ayant remarqué que les altérations des longueurs étaient, dans cette projection et dans le système zénithal équivalent qui aurait le pôle pour central, identiques sur les parallèles de 30° de latitude, ainsi que dans le sens des méridiens, a proposé de construire des mappemondes mixtes en trois parties, comme nous l'avons exposé au § 15 du chapitre III; la surface de la sphère serait ramenée ainsi à la surface équivalente d'un cylindre droit à base circulaire, ayant pour rayon et pour hauteur le rayon même de la sphère.

2° PROJECTION TRANSVERSE.

3. Voici la construction graphique du canevas.

On trace deux droites rectangulaires (fig. 110) pour représenter, l'une l'équateur, l'autre le méridien central à partir duquel nous supposerons que l'on compte les longitudes, et l'on prend ces droites comme axes des coordonnées x et y de tout point défini par sa latitude l et sa longitude t, ou, si l'on veut, des intersections des méridiens et des parallèles. Les formules qui expriment ces coordonnées en fonction de l et de t sont

$$x=a \sin t \cos l,$$
$$y=a \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t}.$$

La projection est symétrique par rapport à l'équateur et au méridien central, ce qui permet d'obtenir en même temps les quatre points qui ont pour coordonnées géographiques la même latitude boréale ou

australe et la même longitude orientale ou occidentale. Ces formules montrent en outre que pour des valeurs telles que $l = 50°$ et $t = 60°$ on obtient la même valeur de x que pour le groupe $l' = 90° - t = 30°$ et $t' = 90° - l = 40°$.

Le méridien de 90° de longitude est parallèle à l'équateur, et axe de symétrie d'une partie de la figure, les parallèles et les méridiens repassant au-dessus du pôle par les mêmes positions que celles qu'ils ont occupées au-dessous. Il en résulte que si l'on veut projeter la surface sphérique entière, on obtiendra une figure limitée par deux droites parallèles et représentant l'équateur de même que l'axe des coordonnées x.

Le méridien du milieu est seul partagé en degrés égaux; celui de 90° de longitude est partagé comme l'équateur. Les méridiens font aux pôles les mêmes angles que sur la sphère et coupent l'équateur à angles droits. Les parallèles sont perpendiculaires au méridien principal et à celui de 90° de longitude.

Les degrés de l'équateur décroissent depuis le centre, où ils sont égaux aux degrés de latitude, jusqu'à 90° de longitude, où ils sont nuls.

Ce système est très-convenable pour représenter, sous la condition de conservation des surfaces, les pays tels que l'Amérique, qui ont leur plus grande étendue du nord au sud; mais, comme les erreurs croissent très-rapidement avec la longitude, ce tracé ne saurait convenir à la représentation d'un hémisphère ou même d'un pays qui s'étendrait à plus de 60° de chaque côté du méridien central.

Le tableau suivant, calculé en prenant le rayon de la sphère pour unité, contient pour les valeurs de l et de t, de 10 en 10 degrés, les valeurs de x et de y à porter sur l'équateur et sur le méridien central pour obtenir les points d'intersection des parallèles et des méridiens, ce qui permettra de construire ces courbes par points.

La projection n° XI représente la sphère entière.

Valeurs de x.

$$x = \sin t \cos l.$$

LONGITUDE t.										
l	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
90°	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
80	0	0,03015	0,05939	0,08682	0,11162	0,13302	0,15038	0,16317	0,17101	0,17365
70	0	0,05939	0,11698	0,17101	0,21985	0,26140	0,29620	0,32139	0,33682	0,34202
60	0	0,08682	0,17101	0,25000	0,32139	0,38302	0,43301	0,46985	0,49240	0,50000
50	0	0,11162	0,21985	0,32139	0,41317	0,49240	0,55667	0,60402	0,63302	0,64279
40	0	0 13302	0,26140	0,38302	0,49240	0,58682	0,66341	0,71985	0,75441	0,76604
30	0	0,15038	0,29620	0,43301	0,55667	0,66341	0,75000	0,81380	0,85287	0,86602
20	0	0,16317	0,32139	0,46985	0,60402	0,71985	0,81380	0,88302	0,92542	0,93969
10	0	0,17101	0,33682	0,49210	0,63302	0,75441	0,85287	0,92542	0,96985	0,98481
0	0	0,17365	0,34202	0,50000	0,64279	0,76604	0,86602	0,93969	0,98481	1,00000

Valeurs de y.

$$y = \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t}.$$

LONGITUDE t.										
l	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
90°	1,57080	1 57080	1.57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1.57080
80	1,39626	1,39886	1.40648	1.41926	1,43670	1,45793	1 48541	1,51056	1,54018	1,57080
70	1,22173	1,22843	1,24125	1,26545	1 29888	1,31097	1,39078	1,44695	1,50364	1,57080
60	1,04720	1,05380	1 07370	1,10712	1,16650	1 21348	1,28977	1,37584	1,47088	1,57080
50	0.87266	1,88019	0,90311	0,94239	0,99951	1,07617	1,17367	1,29133	1,42011	1,57080
40	0.69813	0,70568	0,72891	0,76961	0,83088	0,91699	1,03361	1,18175	1,36703	1,57080
30	0,52360	0,53025	0,55094	0,58800	0,64585	0,73182	0,85707	1,03599	1,27464	1,57080
20	0,34907	0,35401	0,36953	0,39782	0,44355	0,51522	0,62923	0,81648	1,10100	1,57080
10	0,17455	0,17717	0,18542	0,20086	0,22624	0,27627	0,33904	0,48601	0,79305	1 57080
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	Indéterminé.

CHAPITRE XI.

PROJECTION CONIQUE ORTHOMORPHE DE LAMBERT (1).

1. Nous ne reviendrons pas sur la théorie de cette projection que nous avons exposée longuement au chapitre des projections orthomorphes ; nous donnerons seulement les règles de sa construction.

D'un point P d'une droite indéfinie PA (fig. 111) qui représentera le méridien moyen, on décrit des arcs de cercle avec des rayons ρ donnés par la formule

$$\rho = K\left(\text{tang}\,\frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda},$$

dans laquelle ζ représente la distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement de la terre et donnée par la table III ; K est une constante arbitraire qui fixe l'échelle de la carte et que l'on détermine en se donnant, par exemple, la valeur de la latitude pour laquelle le rayon ρ est égal à l'arc correspondant du méridien du sphéroïde. Supposons que pour $l = 0$, K, c'est-à-dire la distance du pôle à l'équateur sur la carte, doive être égale au quart Q du méridien.

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi a\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 \ldots\ldots\right);$$

ou plus simplement

$$Q = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right);$$

en appelant α l'aplatissement et a le rayon de l'équateur, on aura alors

$$K = Q.$$

Les méridiens qui, sur la sphère, font des angles t avec les méri-

(1) *Voir* 1re partie, chap. II, § 8.

dien moyen, seront des droites partant du pôle P et faisant avec la droite PA des angles égaux à λt; ces angles sont les seuls qui ne soient pas conservée en vraie grandeur par la représentation.

Rappelons seulement ici que que le rapport d'agrandissement des distances élémentaires de la carte et du sphéroïde ne dépend pas de la direction de ces distances et est exprimé par une fonction de la latitude seulement :

$$m = \frac{\lambda K \left(\tang \frac{\zeta}{2}\right)^{\lambda}}{a \sin \zeta} = \frac{\lambda \rho}{a \sin \zeta}.$$

Le rapport d'agrandissement des surfaces élémentaires est le carré de m.

2. La valeur de λ est arbitraire et se détermine de manière à satisfaire à une autre condition. Si l'on veut que les degrés de deux parallèles, de latitude $l_0 = 90° - z_0$ et $l_1 = 90° - z_1$, donnés sur le réseau, aient entre eux le même rapport que sur la sphère, on déterminera λ par la relation

$$\lambda = \frac{\log \sin z_1 - \log \sin z_0}{\log \tang \frac{z_1}{2} - \log \tang \frac{z_0}{2}};$$

z_0 et z_1 peuvent être les compléments des latitudes extrêmes du pays à représenter. Ainsi, pour l'Europe, on peut prendre $z_0 = 20°$ et $z_1 = 60°$, et alors

$$\lambda = 0,78327;$$

les angles au pôle sont ainsi un peu plus des 3/4 des angles véritables; 10° de longitude sont représentés par un angle de 7° 49′ 57″,7, soit 7° 50′ environ.

Si l'on veut représenter ainsi avec la même valeur de λ un hémisphère entier, l'angle au pôle sera de 281° 59′ 38″, et alors le rayon de chaque parallèle se calculera par la formule

$$\log \rho = \log a + \log 1,570796 + 0,78327 \log \tang \frac{z}{2},$$

si l'on suppose la terre sphérique.

Il pourra sembler préférable de prendre pour z_0 et z_1 les colatitudes géographiques des parallèles qui divisent à peu près en trois parties égales la distance des deux parallèles extrêmes de la carte à tracer. Ainsi, pour l'Europe, on pourra prendre

$$z_1 = 46^\circ 40' \quad \text{et} \quad z_0 = 33^\circ 20'.$$

On peut aussi déterminer λ par la condition que l'agrandissement soit minimum pour tous les points d'un parallèle donné de latitude $L = 90^\circ - Z$; λ est alors déterminé par la formule

$$\lambda = \cos Z = \sin L.$$

On prend généralement pour L la latitude du parallèle moyen de la carte à construire, ainsi 50° pour la carte de l'Europe; il vaut cependant mieux, dans ce cas, prendre $L = 51^\circ 34'$ ($Z = 38^\circ 26'$), parce qu'alors $\lambda = 0,78327$ et la carte possède en outre cet avantage que le rapport d'agrandissement est le même sur les parallèles de 70° et de 30°.

La valeur de L qui correspond à $\lambda = \frac{3}{4}$ est

$$L = 48^\circ 35' 25''.$$

Si l'on veut déterminer ainsi λ en tenant compte de l'aplatissement de la terre, on se servira de la formule

$$\lambda = \cos \zeta,$$

dans laquelle ζ se déterminera en fonction de Z à l'aide de la table III.

Le major *Bolotov* (1) a montré que, pour la Russie, la valeur la plus convenable de λ est

$$\log \lambda = \log \sin (55^\circ 6' 20'') = 9,9139237.$$

Si l'on cherche quelles sont pour cette valeur de λ les valeurs du rapport d'agrandissement pour les latitudes de 40°, de 55°, de 55° 6′ 20″ et de 70°, on trouve

$$m_{40} = 1,02809; \quad m_{55} = 0,99620; \quad m_{(55^\circ, 6', 20'')} = 1; \quad m_{70} = 1,03715.$$

Lorsque l'on construit, dans cette projection, des cartes d'étoiles, on peut demander que les 45 premiers degrés de méridien soient égaux aux suivants, c'est-à-dire que le 45° degré de latitude partage tous les méridiens entre le pôle et l'équateur en deux parties égales;

(1) *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XIII, note 1; *Exposé de la projection de Gauss*, lu le 2 décembre 1853, par le major Bolotov.

on devra alors prendre $\lambda = 0{,}78643$, valeur qui diffère peu de celle que l'on doit adopter pour rendre le rapport d'agrandissement le même sur les parallèles de 70° et de 30°, et minimum sur le parallde 51° 34'.

Dans la projection dont nous nous occupons, comme dans toutes celles où les parallèles sont des arcs de cercles concentriques et les méridiens des rayons de ces cercles, il suffira de décrire l'un d'eux et de porter sur les méridiens, toujours faciles à tracer, les mêmes longueurs que sur le méridien moyen, c'est-à-dire les différences entre le rayon de ce premier parallèle et les rayons de tous les autres. Si le pôle n'est pas compris dans la carte, on pourra construire le premier parallèle par points, à l'aide des coordonnées x et y rapportées au méridien moyen et à la perpendiculaire au point dont la latitude L est celle de ce parallèle; appelons ρ_L le rayon correspondant, on aura (fig. 112)

$$Am = x = \rho_L \sin \lambda t,$$
$$mM = y = 2\rho_L \sin^2 \frac{\lambda t}{2}.$$

3. Les principaux avantages de cette projection sont, outre la facilité du tracé, la conservation des angles partout ailleurs qu'au pôle et l'égalité de tous les arcs de méridiens compris entre les mêmes parallèles; cette dernière propriété rend cette projection très convenable pour représenter, sous la condition de similitude des configurations, des pays tels que la Russie, très-étendus en longitude. L'échelle est facile à tracer; il suffit de diviser, soit en degrés et fractions, soit en milles ou en lieues, le méridien moyen. Si la carte est peu étendue en latitude, la portion de cette échelle comprise entre les latitudes extrêmes de la partie de la carte que l'on considère, pourra, sans grande erreur, servir dans cette partie pour toutes les directions. Ainsi, pour la Russie, en adoptant la valeur $\lambda = \sin 55° 6' 20''$, on voit que toute la zone comprise entre les deux parallèles de 50° et de 60° sera raccourcie sur la carte; mais comme la différence entre l'échelle principale et le minimum des échelles partielles ne sera que de 0,0038, toute cette zone, qui est la plus peuplée, ne subira qu'une altération tout à fait insignifiante.

Le tableau suivant renferme les valeurs de ρ pour les valeurs de $z = 90° - l$ de 10 en 10 degrés, dans les quatre hypothèses $\lambda = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ qui permettent de représenter la sphère entière dans des sec-

teurs de 120°, 180°, 240°, 270°; l'hypothèse $\lambda = 1$ donnerait la projection stéréographique polaire.

Nous supposerons $K = 1$, c'est-àdire le rayon de l'équateur de la carte pris pour unité, et la terre sphérique.

Les projections nos VI et VII ont été construites à l'aide des colonnes 3 et 5 de cette table.

Table des valeurs des rayons ρ des parallèles pour les valeurs de $z = 90° - l$.

z.	$\lambda = \frac{1}{3}$.	$\lambda = \frac{1}{2}$.	$\lambda = \frac{2}{3}$.	$\lambda = \frac{3}{4}$.
0°	0,000	0,000	0,000	0,0000
10	0,444	0,296	0,197	0,1609
20	0,561	0,420	0,314	0,2721
30	0,645	0,518	0,416	0,3724
40	0,714	0,603	0,510	0,4686
50	0,776	0,683	0,601	0,5643
60	0,833	0,760	0,693	0,6623
70	0,888	0,837	0,788	0,7655
80	0,943	0,916	0,890	0,8767
90	1,000	1,000	1,000	1,0000
100	1,060	1,092	1,124	1,1406
110	1,126	1,195	1,268	1,3064
120	1,201	1,316	1,442	1,5098
130	1,290	1,464	1,663	1,7721
140	1,401	1,657	1,962	2,1330
150	1,551	1,932	2,406	2,6914
160	1,783	2,381	3,173	3,6750
170	2,253	3,381	5,074	6,2163

CHAPITRE XII.

PROJECTION CYLINDRIQUE ORTHOMORPHE DE LAMBERT (1).

1. Nous avons déjà étudié avec détail ce système au chapitre des projections orthomorphes, et nous avons montré, en parlant des projections cylindriques, qu'il pouvait être considéré comme une projection de Mercator transverse, c'est-à-dire faite sur un cylindre tangent le long d'un méridien suivant une loi analogue à celle du tracé des cartes marines. Nous n'entrerons pas ici dans de nouveaux détails, et nous ne ferons qu'indiquer la construction graphique du canevas.

On trace (fig. 113) deux droites indéfinies rectangulaires dont l'une EE' représentera l'équateur et l'autre PP' le méridien central à partir duquel nous supposerons que l'on compte les longitudes. Ces deux droites sont prises pour axes des coordonnées x et y de tout point défini par sa latitude l et sa longitude t, ou si l'on veut des intersections des méridiens et des parallèles. Les formules qui expriment ces coordonnées en fonction de l et de t sont

$$x = \frac{a}{2M} \log \frac{1 + \sin t \cos l}{1 - \sin t \cos l},$$

$$y = a \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang} l}{\cos t}.$$

Dans la première formule M représente le module des logarithmes vulgaires et a pour valeur 0,4342945... et pour logarithme

$$\log M = 9{,}6377843113\,..... - 10.$$

La projection est symétrique par rapport à l'équateur et au méri-

(1) *Voir* chap. II, § 14.

dien central, ce qui permet d'obtenir en même temps les quatre points qui ont pour coordonnées géographiques la même latitude boréale ou australe et la même longitude orientale ou occidentale par rapport au méridien central. Les formules montrent en outre que, pour des valeurs telles que $l = 50°$ et $t = 60°$, on obtient la même valeur de x que pour le groupe $l' = 90° - t = 30$, et $t' = 90° - l = 40°$.

Le méridien de 90° de longitude est parallèle à l'équateur et axe de symétrie d'une partie de la figure, les parallèles et les méridiens repassant au-dessus du pôle par les mêmes positions que celles qu'ils ont occupées au-dessous. Il en résulte que le canevas de la surface sphérique entière serait limité par deux droites parallèles et représentant l'équateur de même que l'axe des coordonnées x.

Le méridien du milieu est seul partagé en degrés égaux ; celui de 90° de longitude est partagé comme l'équateur. Les méridiens font aux pôles les mêmes angles que sur la sphère et coupent l'équateur et les parallèles à angles droits. Les degrés de l'équateur croissent depuis le centre jusqu'à l'infini.

Les rayons de courbure se calculent facilement à l'aide de la formule

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

On trouve que, pour chaque parallèle, ce rayon de courbure au point d'intersection avec le méridien central est exprimé par

$$\rho_0 = \text{tang}\, z;$$

et, au point d'intersection avec le méridien de 90° de longitude, par

$$\rho_{90} = \sin z.$$

Pour chaque méridien, au point d'intersection avec l'équateur, le rayon de courbure sera exprimé par

$$\rho_m = \text{coséc}\, t = \frac{1}{\sin t}.$$

Enfin on trouve que le pôle est un point d'inflexion pour tous les méridiens ; le rayon de courbure y est infini.

2. Le rapport des distances élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est exprimée en chaque point par

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 l \sin^2 t}},$$

et, de même que dans toutes les projections orthomorphes, ne dépend pas de l'orientation de l'élément considéré. Le rapport d'agrandissement des surfaces est le carré de m.

Ce système, qui conserve les angles comme la projection de Mercator, ne peut convenir comme elle à la navigation parce que les méridiens ne sont plus des droites parallèles, mais il a sur elle l'avantage de ne pas altérer sensiblement les latitudes élevées et de représenter les régions polaires avec toute l'exactitude suffisante. Il convient donc pour représenter, sous la condition de conservation des angles, les pays tels que l'Amérique, très-étendus en latitude, mais les erreurs croissent rapidement avec la longitude et sont infinies à 90°.

La table de la page suivante donne les valeurs de x et de y pour les valeurs de l et de t de 10 en 10 degrés, en supposant le rayon de la terre pris pour unité. Elle a servi à construire la projection n° IX.

Valeurs de x.

$$x = \frac{1}{2M} \log \frac{1 + \sin t \cos l}{1 - \sin t \cos l}.$$

LONGITUDE t.										
l	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
90°	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
80	0	0,03016	0,05946	0,08701	0,11209	0,13382	0,15153	0,16465	0,17271	0,17543
70	0	0,05946	0,11752	0,17271	0,22363	0,26830	0,30531	0,33323	0,35051	0,35638
60	0	0,08701	0,17271	0,25541	0,33697	0,40360	0,46360	0,50987	0,53028	0,54931
50	0	0,1120.	0,22363	0,33697	0,43944	0,53023	0,62805	0,69046	0,74644	0,76291
40	0	0,13382	0,26830	0,40360	0,53923	0,67283	0,79889	0,90733	0,98310	1,01068
30	0	0.1515.	0,30521	0.46360	0,62805	0,79889	0,97296	1,13817	1,2689.	1.31694
20	0	0,1646.	0,33323	0,50987	0,69946	0,90733	1,13817	1,38939	1,62541	1,73542
10	0	0,17271	0,35051	0,53928	0.74644	0,98310	1,26892	1,62549	2,0892.	2,43624
0	0	0,17543	0,65638	0,54931	0,76291	1,01068	1,31694	1,73542	2,43624	Infini.

Valeurs de y.

$$y = \text{arc tang} \frac{\text{tang}\, l}{\cos t}.$$

LONGITUDE t.										
l	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
90°	1,5708.	1,5708.	1,57080	1,5708.	1,5708.	1,57080	1,5708.	1,57080	1,57080	1.57080
80	1,3962	1,39886	1,4064.	1,4192.	1,43670	1,45703	1,46541	1,51056	1,54018	1,57080
70	1,22173	1,2264.	1 2412.	1,26545	1,29888	1,34097	1 3907.	1,44695	1,50364	1,57080
60	1,04720	1,0538.	1 0737.	1,10712	1,1669.	1,21348	1,28977	1,3758.	1,47088	1,57080
50	0,87266	0 88019	0,9031.	0,9423.	0,9995.	1,07617	1,17367	1,29133	1,4261.	1,57080
40	0,60813	0,70568	0,7289.	0,76961	0,83088	0,01699	1,03361	1,18375	1,3670.	1,57080
30	0,52360	0,53025	0,55094	0,58800	0,64585	0,73182	0,85707	1,03599	1,27464	1,57080
20	0,34907	0,35401	0,36953	0,39782	0,44355	0,51522	0.62923	0,81648	1,10100	1,57080
10	0,17453	0,17717	0.18542	0,20086	0,22624	0,27627	0,33904	0,48601	0,79305	1,57080
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	Indétermin.

CHAPITRE XIII.

PROJECTIONS POLYCONIQUES (1)

1° PROJECTION POLYCONIQUE RECTANGULAIRE

Adoptée au *Topographical Department of the War Office* pour les cartes embrassant une grande portion de la surface de la terre.

1. Nous avons dit que ce système, tout de convention, représente les parallèles par des arcs de cercle, et les méridiens par des courbes qui coupent les parallèles à angles droits; de sorte que chaque petit carré de la sphère compris entre deux parallèles et deux méridiens, est représenté par un petit rectangle curviligne dont les deux bases sont des arcs de cercle. Les rayons des parallèles sont égaux aux cotangentes de leurs latitudes, et les centres sont tous sur la droite qui représente le méridien central que nous prendrons pour méridien de départ. Sur ce méridien les parallèles conservent les mêmes distances que sur la sphère.

Soit M (fig. 114) un point du méridien central dont la latitude est $l = 90° - z$, P le pôle distant de M de l'arc PM $= az$; le centre du parallèle du point M sera déterminé par la distance CM $= a \operatorname{tang} z$.

Pour déterminer les méridiens, cherchons maintenant la nature de la courbe qui coupera à angles droits les arcs de cercle qui représentent les parallèles. Considérons un point M' infiniment voisin de M, de telle sorte que MM' $= adz$; soit C' le centre du parallèle de M'; C'M' $= a \operatorname{tang}(z + dz)$. Enfin supposons tracé un méridien PAA' et joignons CA et C'A'; ces droites devront être tangentes à ce méridien puisqu'elles sont normales aux parallèles. Appelons θ l'angle MCB; l'angle MC'A' sera $\theta + d\theta$, le petit angle C'BC, inclinaison des tangentes sera $d\theta$.

Nous cherchons une relation entre z et θ; or

$$CC' = C'M' - CM - MM' = a \operatorname{tang}(z + dz) - a \operatorname{tang} z - adz,$$
$$CC' = a \operatorname{tang}^2 z dz.$$

(1) Voir 1re partie, chap. VI § 17.

Le triangle BCC′ donne

$$\frac{CC'}{\sin B} = \frac{C'B}{\sin\theta};$$

et, en remplaçant les sinus des arcs infiniment petits par ces arcs eux-mêmes et négligeant les infiniment petits de second ordre, il vient

$$\frac{\text{tang}^2 z\,dz}{d\theta} = -\frac{\text{tang}\,z}{\sin\theta};$$

d'où

$$-\text{tang}\,z\,dz = \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

En intégrant les deux membres de cette équation nous obtenons

$$\log\cos z = \log\text{tang}\frac{\theta}{2} + C'',$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\text{tang}\frac{\theta}{2} = K\cos z,$$

dans laquelle la constante K détermine chaque courbe particulière.

Cherchons en quel point cette courbe coupe l'équateur EE′. Pour cela remarquons que la distance d'un point quelconque A de la courbe au méridien central est exprimée par

$$a\,\text{tang}\,z\sin\theta = 2a\frac{\text{tang}\,z\;\text{tang}\frac{\theta}{2}}{1+\text{tang}^2\frac{\theta}{2}} = 2K\frac{a\sin z}{1+K^2\cos^2 z},$$

à l'équateur, c'est-à-dire pour $z = 90°$, cette distance est égale à $2Ka$: la constante K représente donc la moitié de la longitude du méridien considéré, de telle sorte que l'équateur sera développé en véritable grandeur et divisé en parties égales comme le méridien central.

Il en résulte la construction suivante pour tracer par points un méridien d'une longitude donnée $t = 2K$.

Soit P le pôle, M un point du méridien central à la latitude $l = 90° - z$, AMA_1 l'arc qui représente son parallèle. Traçons la tangente nMn_1 perpendiculaire à PM en M. Pour déterminer le point A dont la longitude t est donnée, soit $t = 32°$, portons sur la tangente Mn de cha-

que côté de M deux longueurs $Mn = Mn_1$ égales à la moitié de la vraie longueur de l'arc de parallèle de la sphère (soit ici l'arc de 16° décrit avec le rayon $a \sin z$), et des points n et n_1 décrivons des arcs de cercle qui couperont le parallèle aux points cherchés A et A_1.

En effet Mn est, par construction, égal à $\frac{t}{2} \sin z$ ou à $K \sin z$, et puisque $CM = a \operatorname{tang} z$, l'angle MCn est tel que

$$\operatorname{tang} MCn = \frac{K \sin z}{\operatorname{tang} z} = K \cos z,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} MCn = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

ou

$$MCn = \frac{\theta}{2}.$$

Par suite

$$ACM = \theta,$$

et la distance du point A au méridien central est

$$\operatorname{tang} z \sin \theta,$$

ce qu'il fallait démontrer (1).

2. Il est facile de trouver le rayon de courbure d'un méridien quelconque de longitude $2K = t$ à la colatitude z.

On sait que le rayon de courbure ρ est égal à $\frac{ds}{d\theta}$, $d\theta$ étant l'angle de deux normales ou de deux tangentes infiniment voisines. Or, dans la figure 114

$$C'A' = CA + CC' \cos \theta + AA',$$

$$AA' = ds; \quad CC' = a \operatorname{tang}^2 z dz, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = K \cos z.$$

$$ds = a(\text{séc}^2 z - \operatorname{tang}^2 z \cos \theta) dz = a \frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{1 + K^2 \cos^2 z} dz,$$

$$\text{séc}^2 \frac{\theta}{2} \, d\frac{\theta}{2} = -K \sin z dz;$$

d'où

$$d\frac{\theta}{2} = -\frac{K \sin z}{1 + K^2 \cos^2 z} dz;$$

(1) Cette ingénieuse construction a été donnée par M. O' Farrell.

donc

$$\rho = a\,\frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{K \sin z}.$$

Cette formule montre que le rayon de courbure est infini au pôle.

Occupons-nous maintenant de la déformation en surface. Comparons pour cela le petit carré compris sur la sphère entre deux méridiens et deux parallèles infiniment rapprochés, et le rectangle correspondant sur la projection. Les côtés du carré sphérique étant $2ad\,K \sin z$ et adz, sa surface est $2a^2 \sin z\, dK\, dz$. Sur la projection nous avons vu que l'élément de courbe méridienne était égal à

$$a\,\frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{1 + K^2 \cos^2 z}\,dz;$$

l'élément de courbe parallèle est égal à

$$2ad\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tang}\, z;$$

mais puisque $\mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} = K \cos z$, on obtient en différentiant sans faire varier z

$$\mathrm{séc}^2\frac{\theta}{2}\,d\,\frac{\theta}{2} = \cos z\,.\,dK,$$

d'où

$$d\,\frac{\theta}{2} = dK\,\frac{\cos z}{1 + K^2 \cos^2 z}.$$

L'élément de courbe parallèle est donc exprimé par

$$a\,\frac{2dK \sin z}{1 + K^2 \cos^2 z}.$$

La surface du petit rectangle est alors égale à

$$2a^2 \sin z (dK\,.\,dz)\,\frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{(1 + K^2 \cos^2 z)^2}.$$

La surface du rectangle de la carte est donc à la surface du petit carré correspondant sur la sphère dans le rapport de

$$\frac{1 + K^2 + K^2 \sin^2 z}{(1 + K^2 \cos^2 z)} \quad \text{à} \quad 1.$$

Si nous faisons ce rapport égal à l'unité, il en résulte l'équation

$$K^4 \cos^4 z + 3K^2 \cos^2 z - 2K^2 = 0,$$

qui est satisfaite, soit par $K = 0$, soit par l'égalité

$$K^2 \cos^4 z + 3 \cos^2 z - 2 = 0. \qquad (E)$$

On en conclut qu'il n'y a pas d'exagération de surface le long du méridien central et le long de la courbe particulière définie par l'équation (E). Cette courbe coupe le méridien central à angles droits à la lalitude de 54° 44′ environ. A partir de ce point elle s'incline peu à peu vers le sud ; à 90° de longitude elle atteint 50° 26′ de latitude, et à 180°, c'est-à-dire sur le méridien qui limite le planisphère, elle atteint 43° 46′.

Les surfaces de toutes les contrées situées au nord de cette ligne sont diminuées et les surfaces des contrées situées au sud sont au contraire augmentées. Si l'on représente le globe entier dans ce système de projection, on trouve que l'aire est exprimée par

$$\left[(4+\pi^2)\tang^{-1}\frac{\pi}{2} + 2\pi\right]a^2,$$

et que la véritable surface de la sphère est ainsi augmentée dans le rapport de 8 à 5. On trouve aussi que le périmètre de la représentation est égal à la circonférence du globe multipliée par

$$\sqrt{4+\pi^2} - 1 \quad \text{ou} \quad 2{,}72.$$

Ce méridien fait au pôle, avec le méridien central, et de chaque côté, un angle de 115° 2′ 16″. En resumé, cette projection a l'avantage de conserver les longueurs des degrés sur le méridien central et sur l'équateur, de figurer les parallèles et les méridiens par des courbes très-faciles à construire qui se coupent à angles droits comme sur la sphère, et de permettre de représenter des continents assez vastes, tels que les deux Amériques, sans déformation considérable.

Comme ce tracé n'est employé que pour les cartes embrassant une grande portion de la surface de la terre, il est inutile d'y tenir compte de l'aplatissement. On trouvera dans la table II, employée au *War office*, les valeurs des rayons des parallèles développés, c'est-à-dire les côtés des cônes tangents, et des degrés de longitude de

chaque parallèle de degré en degré. Cette table est calculée en prenant pour unité le degré de l'équateur supposé égal au degré de méridien ; le rayon de la sphère est alors exprimé par 57,2958.

La projection nᵒ XXXVI représente la sphère entière.

2ᵒ PROJECTION POLYCONIQUE ORDINAIRE

Du *Coast Survey Office* des États-Unis.

8. Pour tracer le canevas de cette projection, on construit deux droites rectangulaires dont l'une représentera le méridien central et l'autre l'équateur ; à partir du point d'intersection on porte sur la première les longueurs des degrés de latitude calculées dans la 6ᵉ colonne de la table I dans l'hypothèse de l'aplatissement $\frac{1}{299,15}$, et sur la seconde les longueurs des degrés de longitude de l'équateur. A partir de chacun des points de division du méridien central on porte les longueurs des côtés des cônes tangents calculées dans la 8ᵉ colonne de la même table, et l'on obtient ainsi les centres des cercles qui représenteront les parallèles correspondants. Sur chacun de ces arcs de cercle on porte ensuite les longeurs des degrés de longitude données dans la 7ᵉ colonne, puis on fait passer par les points correspondants des cercles qui représentent les méridiens.

On peut, pour plus d'exactitude, calculer la corde de chaque arc de parallèle, mais il vaut encore mieux construire les parallèles par points aussi bien que les méridiens, en les rapportant à deux axes de coordonnées rectangulaires, le méridien central et la tangente à chaque parallèle. Il est très-facile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

Appelons t la différence des longitudes du point considéré M (fig. 115) et du méridien central, l la latitude de ce point, θ l'angle correspondant sous-tendu au centre C du parallèle par l'arc OM. On aura

$$\text{arc OM} = t\text{N}\cos l = \theta\text{C} = \theta\text{N}\,\text{cotang}\, l,$$

d'où

$$\theta = t \sin l,$$

et alors

$$x = \mathrm{C}\sin\theta = \frac{a \operatorname{cotang} l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \sin\theta,$$

$$y = \mathrm{C} - \mathrm{C}\cos\theta = \frac{2a \operatorname{cotang} l}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Les valeurs en mètres des coordonnées x et y pour 30° de longitude sur chaque parallèle de 1° à 54° de latitude ont été calculées au *Coast survey office* (bureau de l'hydrographie) des États-Unis et publiées par ce bureau (1); nous ne les reproduisons pas, mais nous donnons ici une table des valeurs des rayons des parallèles de 10° en 10°, des longueurs des arcs de 10° de longitude et des coordonnées x et y des extrémités de chacun de ces parallèles entiers développés, en prenant pour axes la tangente au milieu de chaque parallèle et le méridien central; cette table, qui permet de construire très-facilement la projection polyconique de la surface entière du globe, est calculée en prenant le rayon de la sphère pour unité; elle suppose donc au méridien central une longueur de 3,1416 d'un pôle à l'autre (2). Dix degrés de latitude ont pour longueur 0,17453.

Nous donnons aussi les valeurs de l'angle θ sous-tendu au centre de chaque parallèle par dix degrés de longitude et calculées d'après la formule

$$\theta = t \sin l.$$

Cette table rendra très-facile la construction de toute projection polyconique ordinaire, même en tenant compte de l'aplatissement de la terre; lorsqu'on aura décrit les cercles de latitude, on déterminera les méridiens par points beaucoup plus exactement qu'on ne pourrait le faire en portant à la suite les unes des autres les longueurs des degrés de longitude, car on évitera ainsi l'erreur que l'on commettrait en remplaçant l'arc par sa corde.

La projection n° XXXVII représente la sphère entière.

---

(1) *Report of the Superintendent of the Coast Survey during the year* 1859, Washington, 1860, in-4, p 330 à 358. *Appendice n° 33 : Tables for projecting maps of large extent, arranged by J. E. Hilgard, assistant, U. S. C. S.*

(2) *Report of the Superintendent of the Coast Survey, during the year* 1856; *Appendice n° 58 by assistant J. E. Hilgard.*

Table pour le développement polyconique de la sphère entière.

LATITUDE.	x	y	LONGUEUR de 10° de parallèle.	RAYON des parallèles.
0°	3,142	0,000	0,1745	Infini.
10	2,942	0,823	0,1719	5,671
20	2,416	1,439	0,1640	2,747
30	1,732	1,732	0,1512	1,732
40	1,074	1,709	0,1337	1,192
50	0,563	1,461	0,1122	0,839
60	0,236	1,101	0,0873	0,577
70	0,069	1,721	0,0597	0,364
80	0,008	0,352	0,0303	0,176
85	0,001	0,175	0,0152	0,087
90	0,000	0,000	0,0000	0,000

Angles sous-tendus au centre de chaque parallèle par 10° de longitude.

Latitude l.	θ	l	θ	l	θ	l	θ
0°	0° 00′ 00″,0	23°	3° 54′ 26″,3	46°	7° 11′ 36″,2	69°	9° 20′ 08″,9
1	0 10 28 3	24	4 04 02 5	47	7 18 48 7	70	9 23 48 9
2	0 20 56 4	25	4 13 34 3	48	7 25 53 2	71	9 27 18 9
3	0 31 24 1	26	4 23 01 4	49	7 32 49 6	72	9 30 38 0
4	0 41 51 2	27	4 32 23 7	50	7 39 37 6	73	9 33 47 0
5	0 52 17 6	28	4 41 41 0	51	7 46 17 3	74	9 36 45 4
6	1 02 43 0	29	4 50 53 1	52	7 52 48 4	75	9 39 33 3
7	1 13 07 3	30	5 00 00 0	53	7 59 10 9	76	9 42 10 6
8	1 23 30 2	31	5 09 01 1	54	8 05 24 6	77	9 44 37 3
9	1 33 51 8	32	5 17 57 1	55	8 11 29 5	78	9 46 53 3
10	1 44 11 3	33	5 26 47 0	56	8 17 25 4	79	9 48 58 6
11	1 54 29 1	34	5 35 31 0	57	8 23 12 1	80	9 50 53 1
12	2 04 44 8	35	5 44 08 8	58	8 28 49 7	81	9 52 36 8
13	2 14 58 2	36	5 52 40 3	59	8 34 18 0	82	9 54 09 7
14	2 25 09 2	37	6 01 05 3	60	8 39 36 9	83	9 55 15 2
15	2 35 17 5	38	6 09 23 8	61	8 44 46 3	84	9 56 42 8
16	2 45 22 9	39	6 17 35 5	62	8 49 46 1	85	9 57 43 0
17	2 55 25 4	40	6 25 40 4	63	8 54 36 2	86	9 58 32 3
18	3 05 24 6	41	6 33 38 1	64	8 59 16 6	87	9 59 10 7
19	3 15 20 5	42	6 41 28 7	65	9 03 47 1	88	9 59 38 1
20	3 25 12 7	43	6 49 11 9	66	9 08 07 6	89	9 59 54 5
21	3 35 01 3	44	6 56 47 7	67	9 12 18 2	90	10 00 00 0
22	3 44 45 8	45	7 04 15 8	68	9 16 18 6		

4. Nous avons indiqué une construction plus rapide et suffisamment exacte pour tracer le canevas d'un hémisphère entier à une échelle peu considérable; on décrit les parallèles à la manière ordinaire et l'on représente le méridien de 90° de longitude qui doit limiter la carte, par une circonférence décrite sur la distance des pôles comme diamètre; on partage ensuite en parties égales les arcs de parallèles ainsi interceptés, et l'on fait passer par les points de division correspondants des courbes qui représentent les méridiens.

3° PROJECTION POLYCONIQUE ÉQUIDISTANTE.

5. Nous avons exposé avec des détails suffisants au § 19 du chapitre VI (1re partie) la construction et les défauts de ce système qui ne doit être employé que dans des limites fort restreintes. Nous ne reviendrons pas sur ce sujet.

CHAPITRE XIV.

1° PROJECTION ZÉNITHALE ÉQUIDISTANTE (1).

1. Cette projection représente chaque almicantarat par une circonférence d'un rayon ρ égal à l'arc θ de grand cercle qui, sur la sphère, mesure la distance de cet almicantarat au centre de la surface à représenter. Ces distances sont ainsi représentées en véritable grandeur, et la formule de cette projection est

$$\rho = \frac{\pi}{180} a\theta.$$

Si le pôle lui-même est pris pour centre, les parallèles de la projection ont pour rayons les différentes valeurs de

$$\frac{\pi}{180} a(90° - l).$$

Les méridiens sont des rayons de ces circonférences et font entre eux les mêmes angles que sur la sphère.

La projection n° XXVIII représente l'hémisphère nord.

2. Lorsque le point central est pris sur l'équateur, les degrés sont conservés sur la ligne des pôles et sur l'équateur, qui sont deux droites rectangulaires, axes de symétrie de la figure, et, sur la circonférence qui limite un hémisphère et qui a pour rayon 1,570796, si le rayon a de la sphère est pris pour unité, ils sont aussi égaux entre eux.

Pour tracer le canevas on partagera d'abord en 90 parties égales le rayon de l'équateur ou le rayon perpendiculaire; chaque partie représentera un degré que l'on partagera encore, si l'échelle le permet, en 60 parties égales ou minutes de la sphère. Pour déterminer en-

(1) *Voir* 1re partie, chap. V, § 5.

suite la position d'un point quelconque défini par sa latitude et sa longitude, il suffira, en appelant z l'azimut de ce point par rapport au point central, et θ l'arc de grand cercle qui unit ces deux points sur la sphère, d'appliquer les formules

$$\cos\theta = \cos t \cos l \quad \text{et} \quad \tang z = \sin t \operatorname{cotang} l,$$

qui, calculées par les valeurs de t et de l de 5 en 5 degrés dans la table IV, permettront de construire par points les méridiens et les parallèles. Il suffira, en effet, de faire au centre, avec la droite qui doit représenter le premier méridien, des angles égaux à z, et de porter sur chacune de ces directions des longueurs égales aux nombres correspondants de degrés et minutes qui expriment les arcs θ, en se servant de l'échelle des degrés préalablement construite.

La projection n° XXIX a été dressée dans ce système.

3. La construction est plus compliquée lorsque le point central est un point quelconque de la sphère. Les formules de transformation des coordonnées l et t en azimuts z et distances θ sont celles que nous avons données pour toutes les projections zénithales. Les valeurs de z et θ une fois obtenues, la construction s'achèvera facilement en portant les valeurs de θ sur les directions qui font avec la ligne des pôles les angles z correspondants.

On pourra aussi employer la construction *par analogie* que nous avons indiquée au § 3 du chapitre V (1re partie), en construisant d'abord une projection stéréographique ayant même centre que la projection zénithale équidistante. Ayant obtenu l'arc de grand cercle qui unit chaque point au centre, il suffira de le porter en véritable grandeur sur le rayon correspondant de la carte. On n'aura plus ensuite qu'à réunir par des courbes continues les points de même latitude pour avoir les parallèles et les points de même longitude, pour avoir les méridiens.

La projection n° XXX a été construite sur l'horizon de Paris.

4. Nous ne ferons que rappeler ici les formules qui expriment les altérations d'angles et de longueurs, et que nous avons établies aux §§ 11 et 12 du chapitre V.

En appelant α l'angle d'une direction quelconque avec le grand cercle qui joint le sommet de cet angle au point central sur la sphère, et β l'angle correspondant sur la carte, on a

$$\tang\beta = \frac{\theta'}{\sin\theta}\tang\alpha,$$

en posant

$$\theta' = \frac{\pi}{180}\,\theta.$$

L'angle le plus altéré A de la sphère est exprimé par

$$\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{\sin\theta}{\theta'}},$$

et l'angle correspondant B par

$$\operatorname{tang} B = \pm\sqrt{\frac{\theta'}{\sin\theta}}.$$

Au centre de la carte, pour $\theta = 0$, on trouve $A = B = \pm 45°$; la déviation est nulle; l'angle A de déviation maximum décroît ensuite jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors $\operatorname{tang} A = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ou $A = 38°35'10''$, tandis que B décroît jusqu'à $51°24'50''$; la déviation maximum est donc de $12°49'40''$.

En tout point il existe une infinité de groupes de directions conjuguées, c'est-à-dire faisant entre elles le même angle sur la carte ou sur la sphère; ces directions sont définies sur la sphère par la relation

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sin\theta}{\theta' \operatorname{tang}\alpha},$$

et sur la carte par la relation

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{\theta'}{\sin\theta \operatorname{tang}\beta}.$$

Le rapport des distances élémentaires correspondantes de la carte et de la sphère est égal à l'unité quand ces distances sont prises sur le rayon du point considéré; dans la direction des almicantarats il est maximum et exprimé alors par

$$m_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\theta'}{\sin\theta}.$$

Ce rapport maximum croît depuis le centre, où il est égal à l'unité, jusqu'à ce que $\theta = 90°$, valeur pour laquelle il est égal à $\frac{\pi}{2} = 1,5708$; si l'on prolonge la carte au delà d'un hémisphère, il continue à croître jusqu'à l'infini. Nous avons montré que, ce rapport

étant, à 30° du centre, exprimé par $\frac{60}{57,29}$, valeur qui diffère très-peu de l'unité, on pourra, si la carte ne dépasse pas ces limites, dresser une échelle de parties égales suffisantes pour de petites distances et applicable dans toutes les directions.

Cette propriété rend cette projection zénithale très-utile dans la pratique parce que, facile à tracer, elle permet d'évaluer très-promptement et avec une exactitude suffisante, non-seulement les distances au point central, mais encore les distances des différents points entre eux, toutes les fois que la carte ne s'étend pas à plus de 30 ou 40° du centre.

2° PROJECTION GLOBULAIRE, DITE IMPROPREMENT PROJECTION ANGLAISE OU D'ARROWSMITH (1).

5. Pour tracer cette projection on décrit une circonférence d'un rayon arbitraire et l'on mène deux diamètres perpendiculaires dont l'un représente le méridien central et l'autre l'équateur. On représente ensuite les méridiens équidistants de la sphère par des arcs de cercle passant par les deux pôles et par les divisions égales de l'équateur, et les parallèles par d'autres arcs de cercle passant par les divisions égales du méridien moyen ainsi que des parallèles extrêmes.

Lorsque les centres des cercles sont très-éloignés on détermine les circonférences par points comme nous l'avons indiqué pour la projection stéréographique. Voici les formules qui expriment les rayons des méridiens et des parallèles.

Appelons ρ_m le rayon d'un méridien de longitude t comptée à partir du méridien du milieu PP′ (fig. 116), δ la distance OD de son point

(1) Cette projection, imaginée par J. B. Nicolosi de PATERNO (Sicile), qui publia dans ce système, en 1660, une série de grandes cartes des deux hémisphères terrestres et des cinq parties du monde, se répandit rapidement en France et fut employée par *Pierre du Val* (1676) *Jeaugeon* (1688), *de Fer* (1700), *Guillaume de l'Isle* (1714) etc.; adoptée en 1794 par l'Anglais Aaron ARROWSMITH sous le nom de *projection globulaire* qui désignait jusqu'alors d'une manière générale les projections à parallèles et méridiens curvilignes représentant un hémisphère dans un cercle entier, elle n'a pas cessé d'être très-employée depuis pour les mappemondes en deux hémisphères.

d'intersection avec l'équateur au centre O du méridien qui limite l'hémisphère. On a

$$\rho_m = \frac{a^2}{2\delta} - \frac{\delta}{2}.$$

Or δ est une fraction connue de a; car si l'on a partagé le rayon de l'équaieur en n parties égales pour tracer les méridiens de $\frac{90}{n}$ en $\frac{90}{n}$ degrés, soit par exemple de 15 en 15°, on a $\delta = \frac{2a}{n}$, soit ici $\delta = \frac{a}{6}$. Donc

$$\rho_m = \frac{1}{2} na + \frac{1}{2}\frac{a}{n} = \frac{a}{2n}(n^2 + 1).$$

De même en appelant ρ_p le rayon d'un parallèle de latitude l, δ' la distance de son point d'intersection avec le méridien central au centre de l'hémisphère, et h la distance NO, on a

$$\rho_p = \frac{a^2 + \delta'^2 - 2h\delta'}{2(h - \delta')};$$

or

$$h = a \sin l \quad \text{et} \quad \delta' = \frac{a}{n};$$

donc

$$\rho_p = \frac{a(n^2 + 1 - 2n \sin l)}{2(n \sin l - 1)}.$$

Le canevas n° XXXVIII est une projection globulaire.

6. *Remarque.* On a à tort confondu cette projection avec celle de Guillaume Postel (1) qui représente un hémisphère sous l'aspect polaire avec les méridiens rectilignes et les parallèles circulaires concentriques et équidistants, et qui peut prendre pour centre un point quelconque de la sphère en remplaçant les méridiens par les cercles azimutaux et les parallèles par les almicantarats. Il est bien évident qu'une projection toute de convention, ne peut s'appliquer que sous l'aspect auquel se rapporte la loi de son tracé. Nous avons déjà fait remarquer du reste que, en considérant la projection équidistante de Postel comme une projection zénithale, l'aspect méridien ne com-

(1) Projection zénithale équidistante polaire.

porte pas des parallèles et des méridiens circulaires et équidistants; ce sont donc deux tracés bien différents qui n'ont pas d'autre point commun que l'équidistance des parallèles et des méridiens sur le méridien moyen et sur l'équateur.

Remarquons encore que la projection globulaire diffère tres-peu de la projection méridienne de la Hire ou de celle de Parent; quoique les paralleles et les méridiens soient représentés dans l'une par des arcs de cercle, dans les deux autres par des arcs d'ellipse, les différences sont si peu sensibles lorsque les dimensions des mappemondes sont restreintes, que ces différents tracés ont été souvent pris l'un pour l'autre.

CHAPITRE XV.

QUELQUES SYSTÈMES CONVENTIONNELS AUJOURD'HUI ABANDONNÉS OU DU MOINS PEU EMPLOYÉS.

1. Nous mentionnerons ici, mais seulement pour mémoire, quelques tracés proposés par des géographes des XVIe et XVIIe siècles et entièrement abandonnés aujourd'hui parce que la facilité de la construction ne pouvait en compenser les inconvénients.

Par rang de date se présente d'abord une projection imaginée en 1524 par Pierre *Benewitz* ou *Apianus* (1). Il trace (fig. 117) une circonférence PEP'E' et deux diamètres perpendiculaires PP', EE' dont il prolonge le dernier d'une longueur égale au rayon de chaque côté de la circonférence, la droite AOA' est ensuite divisée en un nombre arbitraire de parties égales, en 36 ou seulement en 12, si les méridiens doivent être tracés de 10 en 10 degrés, ou seulement de 30 en 30.

Pour tracer ces méridiens on fait passer d'abord des circonférences par les deux pôles et les points de division du diamètre EE'; puis par chacun de ces points tels que F, G avec un rayon égal à celui de la circonférence PEP'E' on décrit des circonférences qui passent évidemment par les points de division extérieurs F_1G_1 et qu'on limite aux tangentes BB', DD' préalablement tracées.

(1) *Cosmographicus liber* Petri Apiani *mathematici*, Landshut, 1524 in-4°; cet ouvrage fut réédité à Anvers en 1533 par les soins de l'astronome Gemma dit le Frison. Cette projection, adoptée par *Sébastien Cabot* pour sa grande mappemonde dont Jomard a reproduit un fac-simile dans sa collection des monuments de la géographie (voir à la bibliothèque impériale), fut très-employée en Europe vers le milieu du XVIe siècle pour le tracé des mappemondes, et notamment par *Bordone*, le moine *François*, *Gastaldo*, *Sébastien Munster*, *Guillaume le Testu*, *Ortelius* (ou *Abraham Ortelz*, 1570), mais cessa de l'être après quelques années.

Dans la mappemonde de Cabot comme dans les spécimens d'Apianus, l'échelle des longitudes est d'un tiers moindre que celle des latitudes afin d'éviter une extension démesurée du cadre dans le sens de l'est à l'ouest.



Pour tracer les parallèles on divise le diamètre PP' en autant de parties égales que EE' et par les points de division on mène des droites parallèles à l'équateur.

Il est inutile d'ajouter que si l'on ne veut représenter qu'un hémisphère, on ne trace que les méridiens et les parallèles intérieurs à la circonférence PEP'E'.

2. La projection imaginée en 1527 par Henri *Loritz* de Glarüs (1) adoptait les méridiens circulaires équidistants de la projection précédente et les parallèles de la projection orthographique méridienne, c'est-à-dire menait des droites par les points qui marquent les latitudes.

3. Nous avons déjà mentionné (2) deux projections proposées par le Père *Fournier* en 1646 pour tracer une carte ***la mieux proportionnée qu'on puisse.*** Les méridiens sont figurés par des ellipses équidistantes ayant la ligne des pôles pour grand axe et partageant par conséquent l'équateur en parties égales; les parallèles sont représentés, dans le premier cas, par des arcs de cercle passant à la fois par les divisions respectivement égales des méridiens extrêmes et du méridien moyen, et, dans le second, par des droites passant par des divisions homologues des méridiens extrêmes comme dans la projection orthographique. Ces deux systèmes ne semblent point avoir été appliqués.

4. Il en est de même de la projection proposée en 1803 par *Schmidt*, et dont nous avons eu également occasion de dire un mot (3); les méridiens sont figurés, comme dans la projection du Père Fournier, par des méridiens elliptiques équidistants; pour tracer les parallèles par points on divise les méridiens en parties égales, et l'on obtient ainsi des courbes qui ne sont ni des circonférences ni des ellipses.

5. *Arago*, dans son *Astronomie populaire*, a choisi, pour donner une idée de la terre jugée astronomiquement, une projection dont les méridiens sont, comme dans la projection précédente, des ellipses également espacées, et les parallèles des cordes également espacées de la circonférence de l'hémisphère. Ces cordes sont ainsi divisées en

(1) HENRICI *Glareani poetæ laureati de geographia liber unus*. Bâle, 1227, cap. X, fol. 12. C'est au chap. XIX de cet ouvrage que se trouve décrite pour la première fois la façon de tracer à plat sur le papier la projection destinée à s'appliquer sur les globes artificiels qu'on avait jusqu'alors dessinés un à un directement sur la sphère même.

(2) *Voir* 1ʳᵉ partie, chap. III, § 18.

(3) *Voir* 1ʳᵉ partie, chap. III, § 18.

parties égales par les ellipses méridiennes. Au delà de 45° de latitude ; les altérations augmentent très-rapidement. La projection n° XXXIX a été dressée dans ce système.

6. En 1849, MM. *Donny*, ayant le projet de construire une carte géographique représentant le théâtre des principaux faits de l'histoire, proposèrent l'emploi d'une projection nouvelle qui ne paraît pas avoir été adoptée depuis. Nous ne pouvons mieux faire que de reproduire le rapport de M. le colonel *Nerenburger* à l'Académie royale de Bruxelles (1).

« Cette projection consiste à représenter un quadrilatère de la « sphère formé de deux arcs de parallèles et de deux arcs de méri- « diens par un trapèze rectiligne dont les quatre côtés sont respecti- « vement égaux aux côtés rectifiés du quadrilatère sphérique. Lorsque « les quadrilatères successifs sont compris entre deux parallèles du « globe, la projection se rapproche beaucoup de celle de de l'Isle; et, « dans le cas où ces quadrilatères recouvrent une zone terrestre obli- « que aux méridiens, les trapèzes peuvent être considérés comme des « parties de projections coniques différentes. Mais si la zone était di- « rigée du nord au sud ou à peu près, le système proposé serait im- « propre à la représenter.

« Les auteurs annoncent, au commencement de leur notice, qu'ils « ne considèrent pas la projection nouvelle comme quelque chose de « préférable à ce qui existe, mais comme un procédé nouveau que « l'on peut ajouter utilement à ceux dont la science dispose déjà.

« Je suis de leur avis quant au premier point, mais comme cette « projection ne jouit d'aucune propriété géométrique particulière, « qu'elle manque d'ailleurs de liaison et d'unité, je pense que son « utilité, dans l'opinion des auteurs, est seulement relative au but « qu'ils avaient en vue, la représentation du théâtre des principaux « faits historiques. »

7. En septembre 1865, le docteur *Jäger*, directeur du musée zoologique de Vienne, proposa, pour représenter la surface entière du globe sans altérer outre mesure les régions polaires antarctiques, une projection *étoilée* d'ailleurs très-facile à construire. Le pôle nord est pris pour centre ; les parallèles sont des octogones irréguliers, mais dont les côtés correspondants sont respectivement parallèles et équidistants. Pour les tracer, il suffit donc de décrire du pôle nord comme

(2) *Bulletin de l'Académie royale de Bruxelles*, t. XVI, 2e part., 1849, p. 391.

centre avec un rayon égal au développement du quart du méridien une circonférence que l'on partage en huit arcs inégaux, un de 55°, trois de 50, un de 45, un de 40 et deux de 35 à partir d'un point convenablement choisi; les parallèles sont alors représentés par des droites équidistantes et parallèles aux cordes de ces arcs, et les méridiens par des rayons également inclinés les uns sur les autres. A l'équateur ces méridiens se coudent de manière à aboutir respectivement aux sommets de huit triangles isocèles ayant pour bases les huit cordes dont l'ensemble forme l'équateur et dont les sommets sont sur une circonférence d'un rayon double de celle qui circonscrit cet octogone; dans chacun de ces triangles les parallèles sont figurés, comme dans l'hémisphère nord, par des droites équidistantes parallèles à la base.

Les dimensions et les positions des triangles ont été choisies de manière à ne pas couper les grandes terres de l'hémisphère austral, telles que l'Australie, le sud de l'Afrique, l'Amérique méridionale.

8. M. *Petermann*, le savant géographe allemand, a proposé dans le recueil qu'il dirige (1) une heureuse modification de la projection étoilée du docteur Jäger. L'hémisphère nord est d'abord représenté en projection équidistante polaire; au delà de l'équateur les parallèles ont encore même centre et même espacement, mais les méridiens se coudent comme dans le système du docteur Jäger et vont aboutir à huit points équidistants de la circonférence ayant pour rayon le diamètre de l'équateur déjà tracé; on forme ainsi une étoile à huit branches égales dans laquelle on peut représenter le globe entier; chacune des branches a par conséquent pour base circulaire un arc de 45° de l'équateur; la première est limitée par les méridiens de 10° et de 55° de longitude est de Greenwich, et comprend toute l'Afrique méridionale; la troisième (de 100° à 145° longitude est de Greenwich) ne comprend qu'une partie de l'Australie; le restant est reporté dans la quatrième branche avec la Nouvelle-Zélande et les plus grandes îles de l'Océanie; la septième enfin comprend à peu près toute l'Amérique méridionale.

Le canevas n° XL, qui est la reproduction de la projection étoilée de M. Petermann, en montre de suite les avantages et les inconvénients. Comme projection polaire de l'hémisphère nord, la projection

(1) *Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt uber wichtige neue Erforschungen aus dem Gesammtgebiete der Geographie; Ergänzungsheft*, n° 10; Gotha.

équidistante est en effet très-convenable; elle permet, jusqu'à 30° ou 40° du centre (60° ou 50° de latitude), d'évaluer les surfaces, les distances et les angles avec une exactitude toujours suffisante pour les besoins de la géographie. Au delà de l'équateur la modification apportée à la projection globulaire a bien pour effet de réduire les altérations de distances et de surfaces, mais les parallèles cessent de couper à angles droits les méridiens dont huit font avec l'équateur des angles de 48 degrés seulement au lieu de 90; enfin la forme étoilée, qui interrompt la continuité des parallèles, et par suite de la représentation, ne permet pas d'appliquer ce système à l'étude de la sphère entière; son utilité est donc très-contestable, et l'on ne voit pas quel avantage ce système aurait sur la représentation en deux hémisphères d'après le système polaire équidistant.

On voit d'ailleurs que la forme adoptée par M. Petermann est encore bien préférable à celle que propose le docteur Jäger, puisqu'elle conserve la perpendicularité des méridiens et des parallèles, et jouit, dans l'hémisphère nord, de tous les avantages de la projection équidistante.

TABLE I.

Éléments du sphéroïde terrestre dans l'hypothèse de l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{299,15}$.

Rayon de l'équateur $a = 6377397^m,16$. Log $a = 6,8046435$. Rayon polaire $b = 6356078^m,96$. Log $b = 6,8031893$.

Excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0,081696830$. Log $e = 8,9122052 - 10$. $e^2 = 0,006674372$. Log $e^2 = 7,8244101 - 10$.

Arc $1'' = \sin 1''$. Log sin $1'' = 4,6855748668 - 10$. Log $(a \sin 1') = 1'' = 1,4902183305$.

LATITUDE.	GRANDE NORMALE ou rayon de courbure de la perpendiculaire $N = \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}$.		RAYON DE COURBURE du méridien $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$.		DEGRÉ du méridien ou de latitude $D_m = \frac{\pi}{180} \rho$.	DEGRÉ du parallèle ou de longitude $D_p = \frac{\pi}{180} N \cos l$.	CÔTE du cône tangent $C = N \operatorname{cotang} l$.
l	Log ρ'	ρ'	Log ρ	ρ	D_m	D_p	C
0	6,8046431	$6377397^m,2$	6,8017351	6334831^m	$110563^m,7$	$111306^m,6$	Infini.
1	6,8646439	6377403	6,8017366	6334853	110561 0	111289 7	365361200^m
2	6,8046452	6377422	6,8017405	6334910	110565 0	111239 2	182625566
3	6,8046475	6377454	6,8017474	6335011	110566 7	111155 0	121689100
4	6,8046505	6377500	6,8017564	6335141	110569 0	111037 2	91262500
5	6,8046545	6377557	6,8017684	6335317	110572 0	110885 8	72895830
6	6,8046593	6377629	6,8017828	6335527	110575 8	110700 9	60679100
7	6,8046650	6377713	6,8017999	6335777	116580 1	110482 4	51942300
8	6,8046715	6377809	6,8018194	6336061	116585 1	116230 5	45380470
9	6,8046790	6377919	6,8018419	6336390	110590 8	109945 2	40268593
10	6,8046872	6378041	6,8018665	6336746	110597 0	109626 6	36171660
11	6,8046963	6378173	6,8018938	6337146	110604 0	109274 9	32812840
12	6,8047062	6378321	6,8019235	6337580	110611 6	108890 0	30007636
13	6,8047168	6378473	6,8019553	6338044	110619 7	108472 1	27628210
14	6,8047281	6378641	6,8019901	6338551	110628 5	108021 4	25583340
15	6,8047409	6378827	6,8020276	6339100	110637 9	167538 0	23806110

50	6,8054956	6389921	6,8042917	6372233	111216 4	71687 0	5361781
51	6,8055204	6390287	6,8043661	6373324	111235 6	70189 1	5174752
52	6,8055452	6390653	6,8044405	6374417	111254 6	68669 6	4992923
53	6,8055698	6391014	6,8045043	6375353	111273 4	67129 0	4815973
54	6,8055941	6391371	6,8045872	6376570	111292 1	65567 7	4643632
55	6,8056182	6391726	6,8046595	6377631	111310 7	63980 3	4475535
56	6,8056420	6392076	6,8047309	6378680	111322 9	62385 1	4311510
57	6,8056654	6392421	6,8048011	6379711	111347 0	60764 7	4151283
58	6,8056884	6392760	6,8048701	6380726	111364 7	59125 6	3991639
59	6,8057109	6393091	6,8049376	6381717	111382 0	57468 2	3841356
60	6,8057331	6393417	6,8050042	6382697	111399 1	55793 1	3691242
61	6,8057549	6393739	6,8050696	6383657	111415 8	54100 8	3544107
62	6,8057762	6394053	6,8051335	6384597	111432 3	52391 8	3399778
63	6,8057979	6394360	6,8051962	6385519	111448 3	50666 5	3258090
64	6,8058173	6394657	6,8052568	6386410	111463 9	48925 6	3118884
65	6,8058371	6394949	6,8053162	6387284	111479 1	47169 7	2982013
66	6,8058563	6395233	6,8053738	6388131	111493 9	45399 1	2847341
67	6,8058749	6395506	6,8054296	6388951	111508 2	43614 4	2714731
68	6,8058929	6395770	6,8054836	6389746	111522 1	41816 3	2584060
69	6,8059102	6396024	6,8055355	6390510	111535 4	40004 3	2455204
70	6,8059269	6396271	6,8055856	6391247	111548 3	38181 8	2328052
71	6,8059430	6396509	6,8056339	6391957	111561 3	36346 5	2202495
72	6,8059583	6396734	6,8056798	6392634	111572 4	34499 9	2078425
73	6,8059729	6396946	6,8057236	6393277	111583 8	32642 7	1955744
74	6,8059867	6397153	6,8057050	6393889	111594 4	30775 2	1834353
75	6,8059998	6397346	6,8058043	6394466	111604 5	28898 4	1710221
76	6,8060121	6397526	6,8058412	6395010	111614 0	27012 5	1595083
77	6,8060237	6397697	6,8058760	6395521	111622 9	25118 2	1477025
78	6,8060345	6397856	6,8059084	6396000	111631 3	23216 2	1359906
79	6,8060145	6398004	6,8059384	6396441	111638 9	21306 9	1243646
80	6,8060537	6398140	6,8059660	6396847	111646 0	19391 1	1128165
81	6,8060620	6398261	6,8059909	6397214	111652 6	17469 2	1013385
82	6,8060694	6398370	6,8060131	6397541	111658 1	15541 8	899232
83	6,8060760	6398467	6,8060329	6397833	111663 3	13609 7	785633
84	6,8060817	6398551	6,8060500	6398086	111667 6	11673 3	672515
85	6,8060865	6398621	6,8060644	6398297	111671 4	9733 3	559807
86	6,8060904	6398680	6,8060761	6398469	111674 4	7790 3	447439
87	6,8060935	6398724	6,8060854	6398606	111676 7	5511 8	335343
88	6,8060957	6398759	6,8060920	6398704	111678 4	3897 5	224449
89	6,8060970	6398777	6,8060959	6398761	111679 4	1949 1	111691
90	6,8060977	6398789	6,8060977	6398789	111679 9	0	0

TABLE II.

Valeurs des degrés de longitude et des côtés des cônes tangents le long de chaque parallèle de degré en degré dans l'hypothèse de la terre sphérique, en prenant le degré de l'équateur pour unité.

Le rayon de la sphère est alors égal à 57,295779.

Latitude l	$D_p = \cos l = \sin(90°-l)$ — D_p	$C = a \operatorname{cotg} l$ — C	Latitude l	$D_p = \cos l = \sin(90°-l)$ — D_p	$C = a \operatorname{cotg} l$ — C
0	1,00000	Infini.	45	0,70711	57,296
1	0,99985	3282,473	46	69466	55,330
2	99939	1640,736	47	68200	53,429
3	99863	1093,268	48	66913	51,589
4	99756	819,368	49	65606	49,806
5	99619	654,894	50	64279	48,077
6	99452	545,133	51	62932	46,397
7	99255	466,637	52	61566	44,764
8	99027	407,681	53	60181	43,175
9	98769	361,751	54	58779	41,628
10	98481	324,940	55	57358	40,119
11	98163	294,761	56	55919	38,646
12	97815	269,556	57	54464	37,208
13	97437	248,175	58	52992	35,802
14	97030	229,801	59	51504	34,427
15	96593	213,831	60	50000	33,080
16	96126	199,814	61	48481	31,760
17	95630	187,406	62	46947	30,465
18	95106	176,338	63	45399	29,194
19	94552	166,399	64	43837	27,945
20	93969	157,419	65	42262	26,717
21	93358	149,261	66	40674	25,510
22	92718	141,812	67	39073	24,321
23	92050	134,980	68	37461	23,149
24	91355	128,688	69	35837	21,994
25	90631	122,871	70	34202	20,854
26	89879	117,474	71	32557	19,729
27	89101	112,449	72	30902	18,617
28	88295	107,758	73	29237	17,517
29	87462	103,364	74	27564	16,429
30	86603	99,239	75	25882	15,352
31	85717	95,356	76	24192	14,285
32	84805	91,692	77	22495	13,228
33	83867	88,228	78	20791	12,179
34	82904	84,944	79	19081	11,137
35	81915	81,827	80	17365	10,103
36	80902	78,861	81	15643	9,075
37	79864	76,034	82	13917	8,052
38	78801	73,335	83	12187	7,035
39	77715	70,754	84	10453	6,022
40	76604	68,282	85	08716	5,013
41	75471	65,911	86	06976	4,007
42	74314	63,633	87	05234	3,003
43	73135	61,442	88	03490	2,001
44	71934	59,331	89	01745	1,000
45	0,70711	57,296	90	0,00000	0,000

TABLE III.

Distance au pôle corrigée en vertu de l'aplatissement $\frac{1}{299,15}$.

DISTANCE au pôle sur la sphère ou complément de la latitude.			DIFFÉRENCE à ajouter pour avoir la distance au pôle corrigée ou le complément de la latitude géocentrique.	DIFFÉRENCES premières.
1°	ou	89°	0° 0' 24",0	24",0
2	»	88	0 48 0	23 9
3	»	87	1 11 9	23 9
4	»	86	1 35 8	23 7
5	»	85	1 59 5	23 6
6	»	84	2 23 1	23 4
7	»	83	2 46 5	23 2
8	»	82	3 9 7	23 0
9	»	81	3 32 7	22 7
10	»	80	3 55 4	22 4
11	»	79	4 17 8	22 1
12	»	78	4 39 9	21 8
13	»	77	5 1 7	21 4
14	»	76	5 23 1	21 0
15	»	75	5 44 1	20 6
16	»	74	6 4 7	20 2
17	»	73	6 24 9	19 7
18	»	72	6 44 6	19 2
19	»	71	7 3 8	18 7
20	»	70	7 22 5	18 1
21	»	69	7 40 6	17 6
22	»	68	7 58 2	17 0
23	»	67	8 15 1	16 4
24	»	66	8 31 5	15 8
25	»	65	8 47 3	15 1
26	»	64	9 2 4	14 4
27	»	63	9 16 8	13 7
28	»	62	9 30 5	13 2
29	»	61	9 43 7	12 4
30	»	60	9 56 1	11 6
31	»	59	10 7 7	11 0
32	»	58	10 18 7	10 1
33	»	57	10 28 8	9 4
34	»	56	10 38 2	8 6
35	»	55	10 46 8	7 9
36	»	54	10 54 7	7 0
37	»	53	11 1 7	6 2
38	»	52	11 7 9	5 4
39	»	51	11 13 3	4 5
40	»	50	11 17 8	3 8
41	»	49	11 21 6	3 0
42	»	48	11 24 6	2 1
43	»	47	11 26 7	1 2
44	»	46	11 27 9	0 4
45	»	45	11 28 3	

TABLE IV.

Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées zénithales.

Valeurs de la distance centrale θ exprimées en degrés.

$\cos\theta = \cos t \cos l.$

	l=0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
t=0°	0° 0'	5° 6'	10° 6'	15° 0'	20° 0'	25° 0'	30° 0'	35° 0'	40° 0'	45° 0'	50° 0'	55° 6'	60° 0'	65° 6'	70° 0'	75° 0'	80° 6'	85° 0'	90° 6'
5	5 6	7 4	11 16	15 48	20 35	25 28	36 23	35 19	46 16	45 13	50 11	55 9	60 8	65 9	76 5	75 3	80 2	85 1	90 0
10	10 0	11 10	14 6	17 58	22 16	26 48	31 29	36 13	41 2	45 44	56 44	55 36	60 30	65 24	70 19	75 14	80 9	85 5	90 0
15	15 0	15 48	17 58	21 6	24 49	28 45	33 14	37 42	42 16	46 55	51 37	56 21	61 7	65 55	76 43	75 31	86 21	85 16	90 0
20	20 6	26 35	22 16	24 49	27 59	31 37	35 32	39 40	43 57	48 22	52 50	57 53	61 58	66 36	71 15	75 55	80 37	85 18	90 0
25	25 6	25 28	26 48	28 54	31 37	34 47	38 20	42 4	46 2	50 2	54 22	58 41	63 3	67 26	71 57	76 26	86 57	85 29	96 0
30	36 0	36 23	31 29	33 14	35 32	38 20	41 25	44 49	48 26	52 14	56 16	60 13	64 20	68 32	72 46	77 3	81 21	85 46	96 6
35	35 0	35 19	36 13	37 42	39 40	42 4	44 49	47 51	51 8	54 36	58 13	61 58	65 46	69 45	73 44	77 46	81 49	85 54	99 6
46	40 6	40 16	41 2	42 16	43 57	46 2	48 26	51 8	54 4	57 12	66 30	63 56	67 29	71 7	74 49	78 34	82 21	86 10	90 6
45	45 0	45 13	45 44	46 55	48 22	50 2	52 14	54 36	57 12	60 0	62 58	66 4	69 18	72 37	76 0	79 27	82 57	86 28	90 0
56	50 6	50 11	56 44	51 37	52 56	54 22	56 16	58 13	60 30	62 58	65 36	68 22	71 15	74 14	77 18	80 25	83 35	86 47	90 6
55	55 0	55 9	55 36	56 21	57 23	58 41	60 13	61 58	63 56	66 4	68 22	70 48	73 20	75 58	78 41	81 28	84 17	87 8	90 0
60	60 0	60 8	60 30	61 7	61 58	63 3	64 26	65 46	67 29	69 18	71 15	73 20	75 31	77 48	80 9	82 34	85 1	87 30	90 0
65	65 0	65 9	65 24	65 55	66 36	67 29	68 32	69 45	71 7	72 37	74 14	75 58	77 48	79 43	81 41	83 45	85 47	87 53	90 6
76	70 0	76 5	76 19	70 43	71 15	71 57	72 46	73 44	74 49	76 0	77 18	78 41	80 9	81 41	83 17	84 55	86 36	88 17	90 6
75	75 0	75 3	75 14	75 31	75 55	76 26	77 3	77 46	78 34	79 27	80 25	81 28	82 34	88 45	84 55	86 10	87 26	88 42	90 6
80	80 0	80 2	86 9	80 21	80 37	80 57	81 21	81 49	82 21	82 57	83 35	84 17	85 1	85 47	86 36	87 26	88 16	89 8	96 0
85	85 6	85 2	85 5	85 10	85 18	85 29	85 40	85 29	86 10	86 28	86 47	87 8	87 30	87 53	88 17	88 42	89 8	89 34	90 0
90	90 0	90 0	90 0	90 6	90 6	90 6	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 6	90 0	90 6	90 0	90 0	90 6	90 0	90 0

TABLE IV (*suite*).

Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées zénithales.

Valeurs de l'angle azimutal z exprimées en degrés.

$\tan z = \sin t \cot l$.

	$l=0°$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$t=0$	indét.	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′
5	90 0	40 53	26 18	18 1	13 28	10 35	8 35	7 6	5 56	4 59	4 11	3 30	2 53	2 13	1 49	1 20	0 53	0 25	0 0
10	90 0	63 16	44 34	32 57	25 30	20 25	16 44	13 56	11 42	9 51	8 17	6 56	5 44	4 38	4 2	2 40	1 45	0 52	0 0
15	90 0	71 20	55 44	44 0	35 25	20 2	24 9	20 17	17 14	14 31	12 15	10 16	8 30	0 53	5 23	3 58	2 37	1 18	0 0
20	90 0	75 39	02 44	51 55	43 13	30 15	30 39	26 2	22 11	18 53	16 1	13 28	11 10	9 4	7 6	5 14	3 29	1 43	0 0
25	90 0	70 4	07 21	57 38	49 16	42 11	36 12	31 7	26 44	22 55	19 31	10 29	13 43	11 9	8 45	6 28	4 16	2 5	0 0
30	90 0	80 0	70 34	01 49	53 57	47 0	40 51	35 32	30 47	26 34	22 46	10 18	16 6	13 7	10 19	7 38	5 7	2 30	0 0
35	90 0	81 20	72 54	64 58	57 36	50 53	44 49	39 19	34 21	29 50	25 42	21 53	18 19	14 58	11 48	8 44	5 46	2 52	0 0
40	90 0	82 15	74 40	67 22	60 29	54 2	48 4	42 33	37 27	32 44	28 21	24 14	20 22	16 21	13 10	9 46	6 28	3 13	0 0
45	90 0	82 57	70 0	69 15	62 46	56 36	50 46	45 17	40 7	35 16	30 41	26 21	22 12	18 15	14 26	10 44	7 7	3 32	0 0
50	90 0	83 29	77 2	70 43	64 35	58 40	53 0	47 35	42 24	37 27	32 44	28 12	23 51	19 39	15 35	11 36	7 42	3 50	0 0
55	90 0	83 54	77 51	71 53	66 2	60 21	54 40	40 28	44 19	39 19	34 30	29 50	25 19	20 54	16 15	12 23	8 13	4 6	0 0
60	90 0	84 14	78 29	72 48	07 12	61 42	56 18	51 3	45 54	40 54	36 0	31 14	26 34	21 59	17 30	13 4	8 41	4 20	0 0
65	90 0	84 29	78 59	73 32	68 7	62 47	57 30	52 19	47 12	42 11	37 15	32 24	27 37	22 55	18 15	13 39	9 5	4 32	0 0
70	90 0	84 41	79 22	74 5	68 50	63 36	58 26	53 19	48 14	43 13	38 15	33 21	28 29	23 40	18 53	14 8	9 24	4 42	0 0
75	90 0	84 49	79 39	74 29	60 21	64 14	59 8	54 4	49 13	44 0	39 1	34 4	29 9	24 15	19 22	14 31	9 40	4 50	0 0
80	90 0	84 55	79 51	74 47	69 43	64 40	59 37	54 35	49 34	44 34	39 34	34 35	29 37	24 40	19 43	14 47	9 51	4 55	0 0
85	90 0	84 59	70 58	74 56	69 56	04 55	59 54	54 54	49 54	44 53	39 54	34 54	29 54	24 55	10 56	14 57	9 58	4 59	0 0
90	90 0	85 0	80 0	75 0	70 0	65 0	60 0	55 0	50 0	45 0	40 0	35 0	30 0	25 0	20 0	15 0	10 0	5 0	0 0

TABLE DES PLANCHES

ANNEXÉES A CE VOLUME.

Chaque projection a été dressée à une échelle telle que le degré de latitude au point central est représenté par un demi-millimètre. Ce centre, autour duquel les erreurs de toutes natures sont minima, n'est pas toujours le centre de figure; mais il est toujours supposé par le méridien de Paris, à l'est et à l'ouest duquel se comptent les longitudes.

PLANCHES I, II, III, IV. — FIGURES DE LA THÉORIE DES PROJECTIONS.

PLANCHE V. — PROJECTIONS ORTHOMORPHES.

Numéros.		Position en latitude du point central.
I.	*Projection stéréographique polaire ou équatoriale.* L'hémisphère nord.	Pôle nord.
II.	*Projection stéréographique méridienne.* Un hémisphère. .	A l'équateur.
III.	» » *sur l'horizon de Paris.* Un hémisphère.	Paris.
IV.	*Projection de Lagrange.* Paris au centre d'altération minimum. Un hémisphère.	»

PLANCHE VI. — PROJECTIONS ORTHOMORPHES.

V.	*Projection de Lagrange.* L'hémisphère nord dans une demi-circonférence	A l'équateur.
VI.	*Projection conique de Lambert.* $\lambda = 3/4$. Du pôle nord à 40° lat. sud	Paris.
VII.	*Projection conique de Lambert.* $\lambda = 1/2$. Du pôle nord à 40° lat. sud	»

PLANCHE VII. — PROJECTIONS ORTHOMORPHES.

VIII.	*Développement du cylindre droit. Projection des cartes réduites ou de Mercator.* Le sphéroïde terrestre de 80° lat. N. à 80° lat. S.	A l'équateur.
IX.	*Développement du cylindre transverse.* La sphère entière.	»



PLANCHE VIII. — PROJECTIONS ÉQUIVALENTES.

Numéros.		Position en latitude du point central.
X.	*Projection cylindrique droite de Lambert.* La sphère entière	A l'équateur.
XI.	*Projection cylindrique transverse de Lambert.* La sphère entière	»
XII.	*Développement du cylindre sécant* le long du parallèle de 45° lat. N. Un hémisphère	A 45° lat. N.
XIII.	*Projection quadrangulaire de M. Collignon.* Un hémisphère	A l'équateur.
XIV.	*Projection sténotère de Lambert.* Développement du cône tangent le long du parallèle de 45° lat. nord. La sphère entière	A 45° lat. N.
XV.	*Projection conique d'Albers.* Développement du cône sécant le long des parallèles de 30° et 60° latitude nord. L'hémisphère nord	A 30° et à 60° lat. N.

PLANCHE IX. — PROJECTIONS ÉQUIVALENTES.

XVI.	*Projection de Mollweide* dite *homalographique de M. Babinet.* La sphère entière	A l'équateur.
XVII.	*Projection* dite *de Bonne* ou *du Dépôt de la guerre.* Développement du cône tangent le long du parallèle de 45° lat. N. L'hémisphère nord	A 45° lat. N.
XVIII.	*Projection sinusoïdale de Sanson* dite *de Flamsteed.* La sphère entière	A l'équateur.
XIX.	*Projection de Werner.* La sphère entière	»
XX.	» *zénithale de Lambert, méridienne* dite *de Lorgna.* Un hémisphère	»
XXI.	*Projection zénithale de Lambert, sur l'horizon de Paris.* Un hémisphère	Paris.

PLANCHE X. — PROJECTIONS ZÉNITHALES COMPENSATIVES.

XXII.	*Projection perspective du colonel James.* Les 2/3 de la sphère	A 23° 30' lat. N.
XXIII.	*Projection par* BALANCE OF ERRORS *de M. Airy.* Les 2/3 de la sphère	»
XXIV.	*Projection centrale polaire.* Du pôle à 30° latitude nord.	Pôle nord.
XXV.	» » *méridienne.* Un tiers de la sphère	A l'équateur.
XXVI.	» » *sur l'horizon de Paris.* Un tiers de la sphère	Paris.
XXVII.	*Projection orthographique méridienne.* Un hémisphère.	A l'équateur.

PLANCHE XI. — Projections zénithales compensatives.

Numéros.		Position en latitude du point central.
XXVIII.	*Projection équidistante polaire.* L'hémisphère nord.	Pôle nord.
XXIX.	» » *méridienne.* Un hémisphère.	A l'équateur.
XXX.	» » *sur l'horizon de Paris.* Un hémisphère	Paris.

PLANCHE XII. — Projections coniques ou cylindriques compensatives.

XXXI.	*Projection conique de Mercator* dite de *de l'Isle.* Développement du cône sécant le long des parallèles de 47° 30′ et de 62° 30′ latitude nord. La sphère entière.	
XXXII.	*Troisième projection de Werner.* La sphère entière. . . .	A l'équateur.
XXXIII.	*Projection plate carrée.* Développement du cylindre tangent le long de l'équateur. La moitié de l'hémisphère nord.	»
XXXIV.	*Projection plate parallélogrammatique.* Développement du cylindre sécant le long du parallèle de 45° latitude nord. L'hémisphère nord.	A 45° lat. N.
XXXV.	*Projection trapéziforme.* Développement des parallèles de 30° et 60° latitude nord. La moitié de l'hémisphère nord.	A 30° et 60° lat. N.

PLANCHE XIII. — Projections polyconiques.

XXXVI.	*Projection polyconique rectangulaire.* La sphère entière.	A l'équateur.
XXXVII.	» » *américaine.* »	»

PLANCHE XIV. — Projections conventionnelles.

XXXVIII.	*Projection globulaire.* Un hémisphère.	A l'équateur.
XXXIX.	» *de l'astronomie populaire d'Arago.* Un hémisphère.	»
XL.	*Projection étoilée du docteur Jäger modifiée par M. Petermann.* La sphère entière en prenant le méridien de Greenwich pour premier méridien.	Pôle nord.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, 26, rue Racine.

Fig. 4

Fig. 8

Fig. 16

Fig. 22

Fig. 30

Geisendorfer sculp.



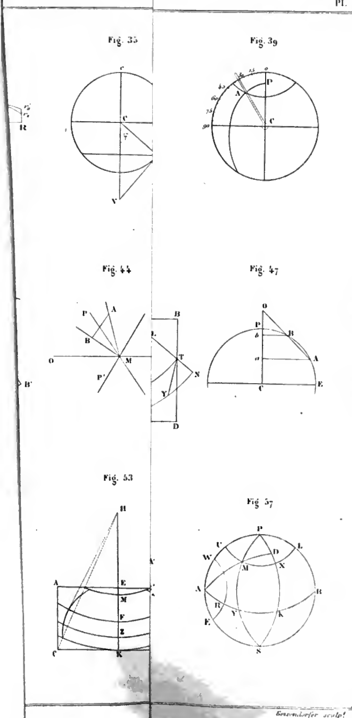

Fig. 35
Fig. 39
Fig. 44
Fig. 47
Fig. 53
Fig. 57
Gessendorfer sculp!

Fig. 61

Fig. 65

Fig. 69

Fig. 73

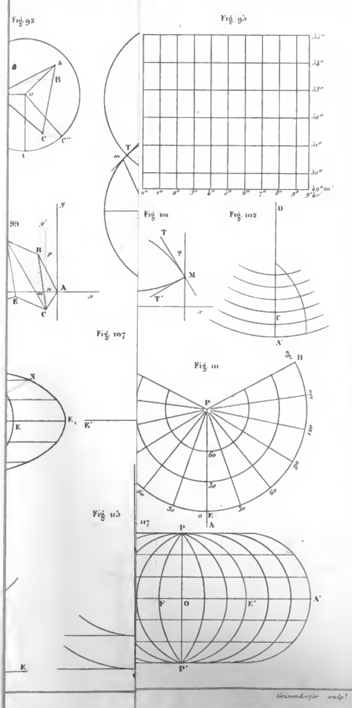
Fig. 76

Fig. 80

Fig. 84

Fig. 88

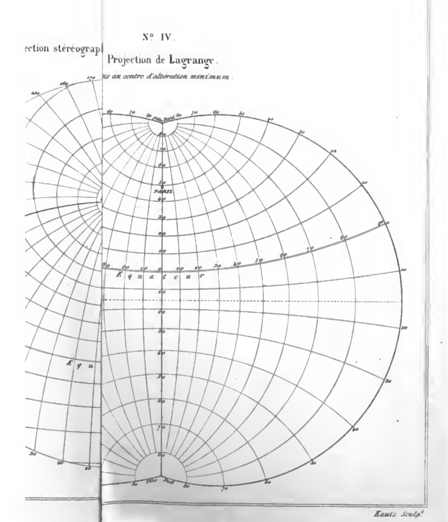
Geisendorfer sculp.



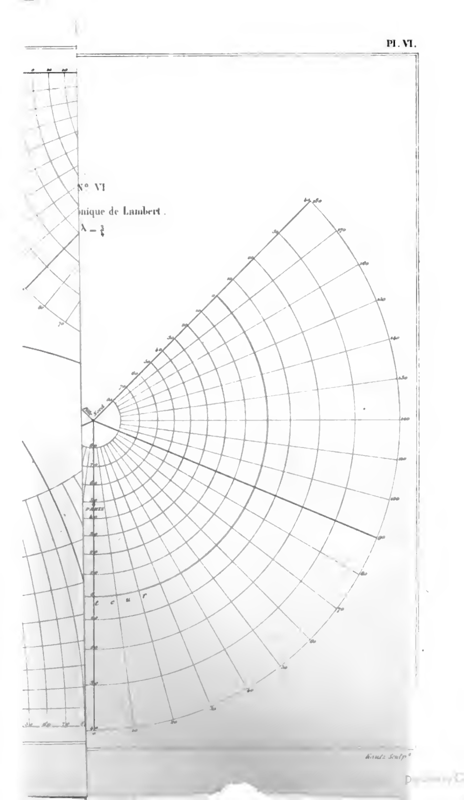
Geissendorfer sculp!

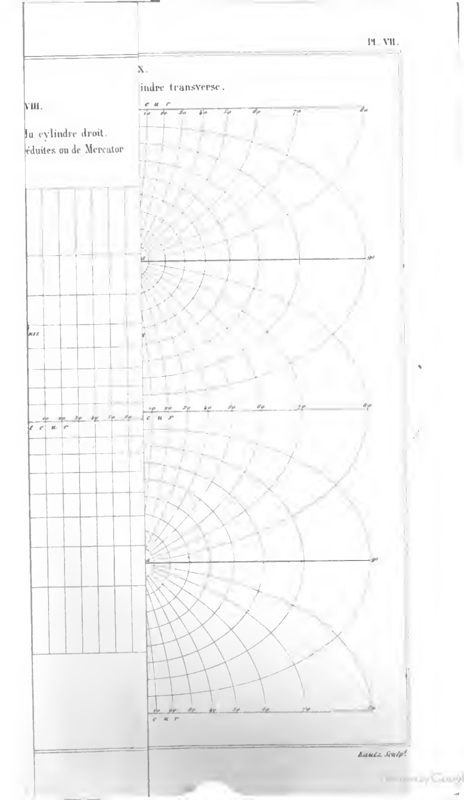
N° IV.

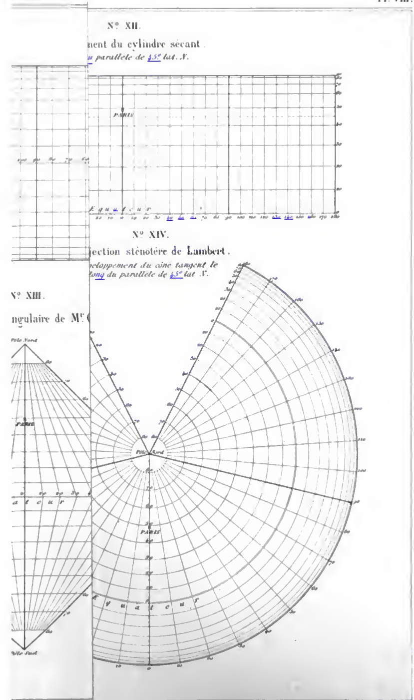
Projection de Lagrange.



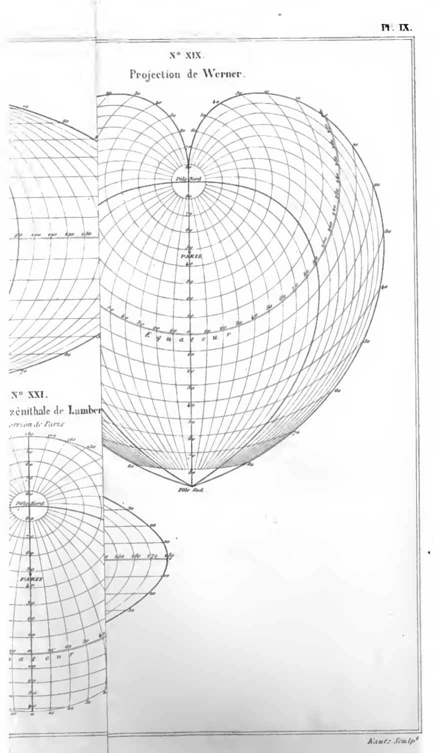



N° VI
nique de Lambert .
Pôle Nord
Paris
Kautz Sculp

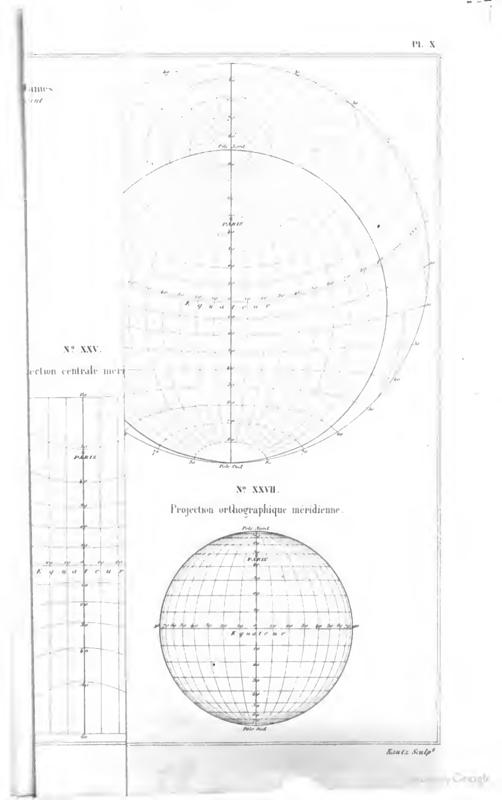

X.
indre transverse.
VIII.
du cylindre droit.
éduites ou de Mercator
Kautz, Sculp.



Kautz Sculpt

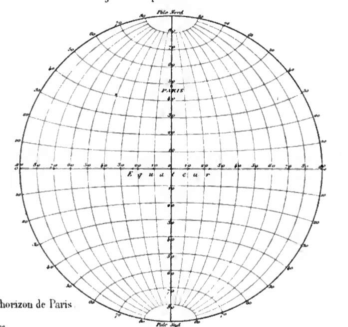

N° XIX.
Projection de Werner.
Pôle Nord
PARIS
E q u a t e u r
Pôle Sud
N° XXI.
zénithale de Lamber
orizon de Paris
Pôle Nord
PARIS
a t e u r

Kautz Sculp.


N° XXV.
ection centrale meri
N° XXVII.
Projection orthographique méridienne.
Pole Nord
PARIS
Equateur
Pole Sud
Kautz Sculp.

N° XXIX.

Projection équidistante méridienne.



N° XXX.

[…]ante sur l'horizon de Paris.

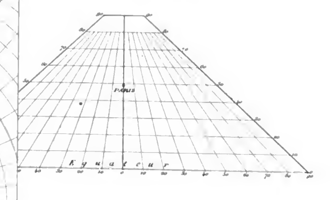
Kautz Sculp.t

le.

N° XXXV.

Projection trapéziforme

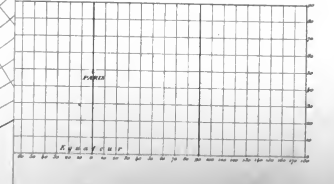
Développement des parallèles de 30° et 60° lat. N.



N° XXXIV.

ojection plate parallélogrammatique.

du cylindre sécant le long du parallèle de 45° lat. N.

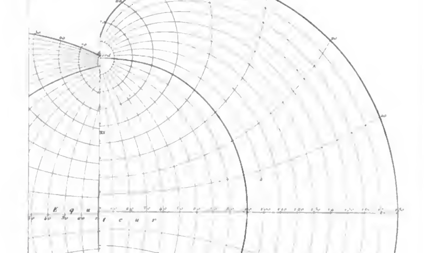


Kautz Sculp.

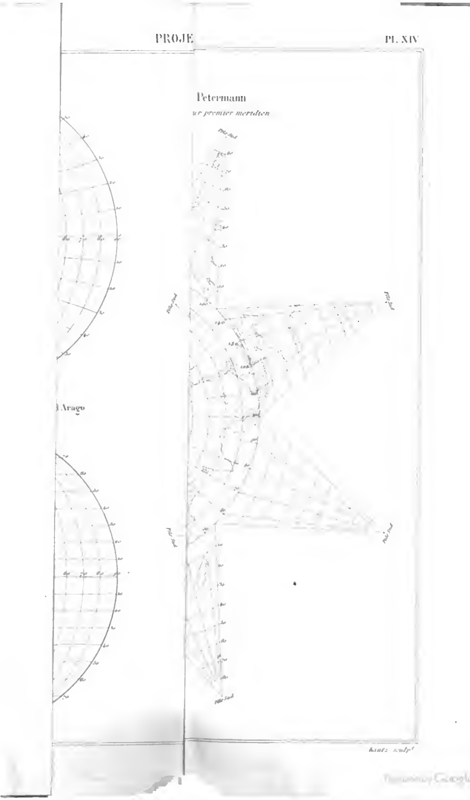
:XVI.

N° nique américaine.

rojection poly



Kautz sculp.


Petermann
ur premier méridien
Arago

MONUMENTS ANCIENS DU MEXIQUE, PALENQUÉ, OCOCINGO et autres ruines de l'ancienne civilisation du Mexique, collection de vues, bas-reliefs, morceaux d'architecture, coupes, vases, terres cuites, cartes et plans dessinés d'après nature et relevés par M. DE WALDECK, texte rédigé par M. l'abbé BRASSEUR DE BOURBOURG. Un beau volume grand in-4 de texte accompagné d'un atlas grand in-folio de 56 planches gravées et lithographiées et dont plusieurs exécutées en chrome. 150 fr.

Le volume de texte se vend séparément : 15 fr.

Ouvrage publié sous les auspices de S. Exc. M. le ministre de l'instruction publique.

COLONIES ET LA POLITIQUE COLONIALE DE LA FRANCE (LES). Domaine colonial de la France — le Sénégal — les Antilles — la Réunion — pêcherie de Terre-Neuve — établissements divers — Madagascar — programme colonial, par M. JULES DUVAL, auteur de l'Histoire de l'Emigration au XIXe siècle, ouvrage couronné par l'Académie des sciences morales et politiques. Un beau volume in-8, accompagné de deux cartes du Sénégal et de Madagascar, d'après les documents les plus récents, par M. V. A. MALTE-BRUN, secrétaire général de la Société de Géographie. 7 fr.

GLOIRES MARITIMES DE LA FRANCE (LES). Biographie des marins, découvreurs, ingénieurs, médecins, hydrographes, etc., les plus célèbres, par MM. LEVOT, bibliothécaire du port de Brest, et DONNEAUD, professeur d'histoire à l'Ecole navale impériale. 1 très-fort vol. in-12. 4 fr.

GUERRE D'AMÉRIQUE (LA), résumé des opérations militaires et maritimes, par M. A. KRATZ, auditeur au conseil d'Etat. In-8 accompagné de trois grandes cartes coloriées. 3 fr. 25 c.

MADAGASCAR, possession française depuis 1642, par M. BARBIÉ DU BOCAGE, membre de la commission centrale de la Société de Géographie, mœurs et coutumes, géographie, histoire, conquête et colonisation. 1 vol. in-8, accompagné d'une grande carte dressée par M. V. A. MALTE-BRUN. 7 fr. 50 c.

ALBANIE (L'), histoire de tous les districts et leurs tribus, description, géographie et mœurs, par M. HECQUARD, consul de France à Scutari. 1 beau vol. in-8, accompagné d'une carte gr. aigle. 8 fr.

YUCATAN (LE), géographie, histoire, monuments, par M. V. A. MALTE-BRUN, secrétaire général de la Société de Géographie de Paris, membre des Sociétés de géographie de Londres, Berlin, Francfort, Saint-Pétersbourg, Genève, Darmstadt, etc. Broch. in-8 avec une grande carte coloriée où se trouvent indiquées toutes les ruines. 1 fr. 75 c.

CANAL INTEROCÉANIQUE DU DARIEN, notice historique et géographique sur l'état de la question du canal du Darien, par M. MALTE-BRUN. Broch. in-8 avec une carte. 1 fr. 50 c.

LE JAPON, histoire, description, mœurs, coutumes, religion, rapports et traités avec les Européens, par MM. FRAISSINET et MALTE-BRUN, secrétaire général de la Société de Géographie. 2 beaux volumes in-12 accompagnés d'une grande carte coloriée. 6 fr.

VOYAGE D'EXPLORATION A LA RECHERCHE DES GRANDS LACS DE L'AFRIQUE ORIENTALE, exécuté par BURTON et SPEKE, par M. V. A. MALTE-BRUN. In-8, avec une grande et belle carte. 3 fr.

VOYAGE DANS L'AFRIQUE CENTRALE DU DOCTEUR VOGEL, par M. MALTE-BRUN. In-8 avec une carte itinéraire. 3 fr. 50 c.

FLEUVE AMOUR (LE) nouvelles acquisitions des Russes dans l'Asie occidentale ; le fleuve Amour d'après les documents originaux et les notes publiées par la Société de géographie de Russie, suivi du journal de l'exploration du fleuve, faite par M. PERMIKINE, par M. V. A. MALTE-BRUN. In-8 accompagné d'une carte. 3 fr. 50 c.

VOYAGE DU DOCTEUR CUNY DE SIOUT A EL-OBÉID, précédé d'une introduction et accompagné d'une carte de la haute Nubie, du Darfour et du Kordofan, par M. MALTE-BRUN. 4 fr.

FLEUVE BLANC (LE), notes géographiques et ethnologiques et chasses à l'éléphant dans le pays des Dinka et des Djour, par M. JULES PONCET, négociant et voyageur à Karthoum. 1 vol. in-8, accompagné d'une carte, dressée par M. MALTE-BRUN. 4 fr. 50 c.

AUSTRALIE INTÉRIEURE (L'), voyages et explorations entrepris à travers le continent australien, de 1860 à 1863, par M. CHARLES GRAD, membre de la Société de Géographie. 1 vol. in-8, accompagné d'une grande carte coloriée, dressée par M. MALTE-BRUN. 4 fr. 50 c.

VOYAGE EN PALESTINE, exécuté par M. V. GUERIN, chargé d'une mission scientifique par S. Exc. M. le Ministre de l'instruction publique. In-8 avec une carte itinéraire. 3 fr. 50 c.

TRIPOLITAINE (LA), commerce, navigation, géographie comparée, par M. ELIE DE LA PRIMAUDAIE. In-8 avec une carte. 3 fr.

HISTOIRE DE L'ISLANDE, depuis sa découverte jusqu'à nos jours, par XAVIER MARMIER. In-8 grand raisin, illustré de 30 vignettes sur bois. 20 fr.

HISTOIRE DE LA SCANDINAVIE, Danemark, Suède et Norwége, par XAVIER MARMIER. 1 vol. in-8 grand raisin. 10 fr.

LITTÉRATURE SCANDINAVE (DE LA), Danemark, Suède et Norwége, par X. MARMIER. 1 fort vol. in-8. 16 fr.

RELATION DU VOYAGE DE LA COMMISSION SCIENTIFIQUE DU NORD en *Scandinavie*, en *Laponie* au *Spitzberg* et aux îles *Féroë*, par M. XAVIER MARMIER, membre de la commission. 2 vol. in-8 grand raisin vélin. 32 fr.

RÉUNION DE LA MER CASPIENNE A LA MER NOIRE (DE LA), par M. le docteur BERGSTRAESSER, conseiller d'État et directeur des salines du gouvernement d'Astrakhan. In-8 avec une grande carte. 4 fr.

ÉTUDE HISTORIQUE ET GÉOGRAPHIQUE DE LA TRIBU DE JUDA, par M. E. G. REY, chargé d'une mission en Orient par Son Exc. M. le ministre de l'instruction publique, membre de la Société impériale des antiquaires de France, de la Société de géographie, etc. 1 beau vol. in-4 accompagné de 2 cartes grand aigle, de plusieurs planches et de figures intercalées dans le texte. 16 fr.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Ce, rue Racine, 26.


Digitized by Google


Digitized by Google


ALESS. GIOLL
FIRENZE





